

場の量子論に基づくマヨラナニュートリノの振動確率

田原智治

広島大学 素粒子ハドロン理論研究室 (共同研究者 両角卓也)

Flavor Physics workshop 2024(2024/12/4)

① Introduction

② ハミルトニアンと真空の時間発展

③ Cooper 対演算子の時間発展と Bogoliubov 変換による固有状態の時間発展

④ S 行列と振動確率

⑤ まとめと今後の展望

① Introduction

② ハミルトニアンと真空の時間発展

③ Cooper 対演算子の時間発展と Bogoliubov 変換による固有状態の時間発展

④ S 行列と振動確率

⑤ まとめと今後の展望

Introduction

- マヨラナニュートリノとマヨラナ質量項に起因する現象に焦点を当てる。
- マヨラナ質量項によって引き起こされるカイラル振動は常にレプトン数の変化を伴う。我々はニュートリノ振動確率を異なるレプトン数を持つ状態間の遷移確率と定義する。
(例えば $\nu \rightarrow \bar{\nu}$ のニュートリノ振動が起こる場合、レプトン数が $+1 \rightarrow -1$ の遷移が起こると考える。)
→ 静止質量と比べて小さい運動量領域の場合で重要
→ **標準的な振動公式では適応できない**
- レプトン数および粒子数が 0 個の固有状態を真空と定義し、その時間発展を Bogoliubov 変換を用いて表した。
- 先行研究 **Adam et.al (Phys. Rev. D 108, no.5, 056009 (2023)[arXiv:2106.02783 [hep-ph]]** のやり方をもとに、場の量子論に基づいてニュートリノの振動確率を表す。
- 先行研究で行っていたニュートリノ振動によるレプトン数の時間変化の期待値と本研究における振動確率の関係について調べた。

① Introduction

② ハミルトニアンと真空の時間発展

③ Cooper 対演算子の時間発展と Bogoliubov 変換による固有状態の時間発展

④ S 行列と振動確率

⑤ まとめと今後の展望

ハミルトニアン

- ゼロモードの寄与を除いた1つのマヨラナ場におけるハミルトニアン

$$\begin{aligned} H &= \int' \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2|\mathbf{p}|} |\mathbf{p}| [a^\dagger(\mathbf{p}, t)a(\mathbf{p}, t) + b^\dagger(\mathbf{p}, t)b(\mathbf{p}, t)] \\ &\quad + m \int_{\mathbf{p} \in A} \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2|\mathbf{p}|} [-ia(\mathbf{p}, t)a(-\mathbf{p}, t) - ib(\mathbf{p}, t)b(-\mathbf{p}, t) + h.c.] \\ &= \sum_{\mathbf{p} \in A} h(\mathbf{p}, t) \end{aligned}$$

$h(\mathbf{p}, t)$ は次のように定める。

$$\begin{aligned} h(\mathbf{p}, t) &= |\mathbf{p}| [N_\alpha(\mathbf{p}, t) + N_\beta(\mathbf{p}, t) + N_\alpha(-\mathbf{p}, t) + N_\beta(-\mathbf{p}, t)] \\ &\quad - im [B_\alpha(\mathbf{p}, t) + B_\beta(\mathbf{p}, t) - B_\alpha^\dagger(\mathbf{p}, t) - B_\beta^\dagger(\mathbf{p}, t)] \end{aligned}$$

- Cooper 対演算子

$$B_\alpha(\mathbf{p}, t) = \alpha(\mathbf{p}, t)\alpha(-\mathbf{p}, t), \quad B_\beta(\mathbf{p}, t) = \beta(\mathbf{p}, t)\beta(-\mathbf{p}, t)$$

- 数演算子

$$N_\alpha(\mathbf{p}, t) = \alpha^\dagger(\mathbf{p}, t)\alpha(\mathbf{p}, t), \quad N_\beta(\mathbf{p}, t) = \beta^\dagger(\mathbf{p}, t)\beta(\mathbf{p}, t)$$

ハミルトニアンの可換性

Cooper 対演算子と数演算子の交換関係

$$[N_\alpha(\pm\mathbf{p}, t), B_\alpha(\mathbf{q}, t)] = -B_\alpha(\mathbf{p}, t)\delta_{\mathbf{p}\mathbf{q}}$$

$$[N_\alpha(\pm\mathbf{p}, t), B_\alpha^\dagger(\mathbf{q}, t)] = B_\alpha^\dagger(\mathbf{p}, t)\delta_{\mathbf{p}\mathbf{q}}$$

$$[B_\alpha(\mathbf{p}, t), B_\alpha^\dagger(\mathbf{q}, t)] = (1 - N_\alpha(\mathbf{p}, t) - N_\alpha(-\mathbf{p}, t))\delta_{\mathbf{p}\mathbf{q}}$$

$$[N_\alpha(\mathbf{p}, t), N_\alpha(\mathbf{q}, t)] = 0$$

この交換関係から \mathbf{p} sector において $h(\mathbf{p}, t)$ は可換である。

$$[h(\mathbf{p}, t), h(\mathbf{q}, t)] = 0$$

以降 $h(\mathbf{p}, t)$ に現れる演算子 $\{\alpha(\pm\mathbf{p}, t), \beta(\pm\mathbf{p}, t), \alpha^\dagger(\pm\mathbf{p}, t), \beta^\dagger(\pm\mathbf{p}, t)\}$ の集合を \mathbf{p} セクターの演算子と呼ぶ。運動量 $\mathbf{p} \in A$ と $-\mathbf{p}$ は同じ \mathbf{p} セクターの運動量に属する。

演算子と真空の時間発展

消滅演算子の時間発展は

$$\alpha(\mathbf{p}, t_f) = e^{iH\tau} \alpha(\mathbf{p}, t_i) e^{-iH\tau}$$

ただし $\tau = t_f - t_i$ の時間間隔である。 t_i と t_f における真空の時刻はそれぞれ以下の関係がある。

$$\alpha(\mathbf{p}, t_f) |0, t_f\rangle = e^{iH\tau} \alpha(\mathbf{p}, t_i) e^{-iH\tau} |0, t_f\rangle = 0$$

終状態と始状態の真空状態の関係は

$$|0, t_f\rangle = e^{iH\tau} |0, t_i\rangle$$

よってこの真空は時間に依存する。 Fock 状態を構成するために、 \mathbf{p} セクターの真空 $|0, t\rangle_{\mathbf{p}}$ を導入する。

$$|0, t\rangle = \prod_{\mathbf{p} \in A} |0, t\rangle_{\mathbf{p}}$$

$h(\mathbf{p}, t)$ が可換であるから、レプトン数 0 の真空の時間発展 $|0, t_f\rangle = e^{iH\tau} |0, t_i\rangle$ は

$$\prod_{\mathbf{p} \in A} |0, t_f\rangle_{\mathbf{p}} = \prod_{\mathbf{p} \in A} e^{ih(\mathbf{p}, t_i)\tau} |0, t_i\rangle_{\mathbf{p}}$$

① Introduction

② ハミルトニアンと真空の時間発展

③ Cooper 対演算子の時間発展と Bogoliubov 変換による固有状態の時間発展

④ S 行列と振動確率

⑤ まとめと今後の展望

Cooper 対演算子の時間発展

各生成消滅演算子の時間発展

$$\alpha(\pm\mathbf{p}, t_f) = \left(\cos E_{\mathbf{p}}\tau - i \frac{|\mathbf{p}|}{E_{\mathbf{p}}} \sin E_{\mathbf{p}}\tau \right) \alpha(\pm\mathbf{p}, t_i) \mp \frac{m}{E_{\mathbf{p}}} \sin E_{\mathbf{p}}\tau \alpha^\dagger(\mp\mathbf{p}, t_i)$$
$$\beta(\pm\mathbf{p}, t_f) = \left(\cos E_{\mathbf{p}}\tau - i \frac{|\mathbf{p}|}{E_{\mathbf{p}}} \sin E_{\mathbf{p}}\tau \right) \beta(\pm\mathbf{p}, t_i) \mp \frac{m}{E_{\mathbf{p}}} \sin E_{\mathbf{p}}\tau \beta^\dagger(\mp\mathbf{p}, t_i)$$

ここで、 $E_{\mathbf{p}} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ 。

Cooper 対演算子の時間発展は次のようになる

$$B_{\alpha}(\mathbf{p}, t_f) = \alpha(\mathbf{p}, t_f)\alpha(-\mathbf{p}, t_f)$$
$$= \left(\cos E_{\mathbf{p}}\tau - i \frac{|\mathbf{p}|}{E_{\mathbf{p}}} \sin E_{\mathbf{p}}\tau \right)^2 B_{\alpha}(\mathbf{p}, t_i) - \left(\frac{m}{E_{\mathbf{p}}} \sin E_{\mathbf{p}}\tau \right)^2 B_{\alpha}^\dagger(\mathbf{p}, t_i)$$
$$+ \left(\cos E_{\mathbf{p}}\tau - i \frac{|\mathbf{p}|}{E_{\mathbf{p}}} \sin E_{\mathbf{p}}\tau \right) \frac{m}{E_{\mathbf{p}}} \sin E_{\mathbf{p}}\tau (1 - N_{\alpha}(\mathbf{p}, t_i) - N_{\alpha}(-\mathbf{p}, t_i))$$

β についても同様

Bogoliubov 変換と固有状態の時間発展

真空 $|0, t\rangle_{\mathbf{p}}$ に Cooper 対演算子を適用したとき、任意の時間 t における固有状態を次のように定義する。

$$|2, t\rangle_{\mathbf{p}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[B_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{p}, t) + B_{\beta}^{\dagger}(\mathbf{p}, t) \right] |0, t\rangle_{\mathbf{p}}$$

$$|4, t\rangle_{\mathbf{p}} = B_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{p}, t) B_{\beta}^{\dagger}(\mathbf{p}, t) |0, t\rangle_{\mathbf{p}}$$

各固有状態の時間発展は、真空と Cooper 対演算子の時間発展から

$$\begin{aligned} & (|0, t_f\rangle_{\mathbf{p}} \quad |2, t_f\rangle_{\mathbf{p}} \quad |4, t_f\rangle_{\mathbf{p}}) \\ &= e^{ih(\mathbf{p})\tau} (|0, t_i\rangle_{\mathbf{p}} \quad |2, t_i\rangle_{\mathbf{p}} \quad |4, t_i\rangle_{\mathbf{p}}) \\ &= (|0, t_i\rangle_{\mathbf{p}} \quad |2, t_i\rangle_{\mathbf{p}} \quad |4, t_i\rangle_{\mathbf{p}}) G(\mathbf{p}, \tau) \end{aligned}$$

$G(\mathbf{p}, \tau)$ は 3×3 の正方行列
(行列成分: $G_{ij}(\mathbf{p}, \tau)$ $i, j = 1 \sim 3$)

- 例: $|0, t_f\rangle$ の場合

$$|0, t_f\rangle_{\mathbf{p}} = G_{11}(\mathbf{p}, \tau)|0, t_i\rangle_{\mathbf{p}} + G_{21}(\mathbf{p}, \tau)|2, t_i\rangle_{\mathbf{p}} + G_{31}(\mathbf{p}, \tau)|4, t_i\rangle_{\mathbf{p}}$$

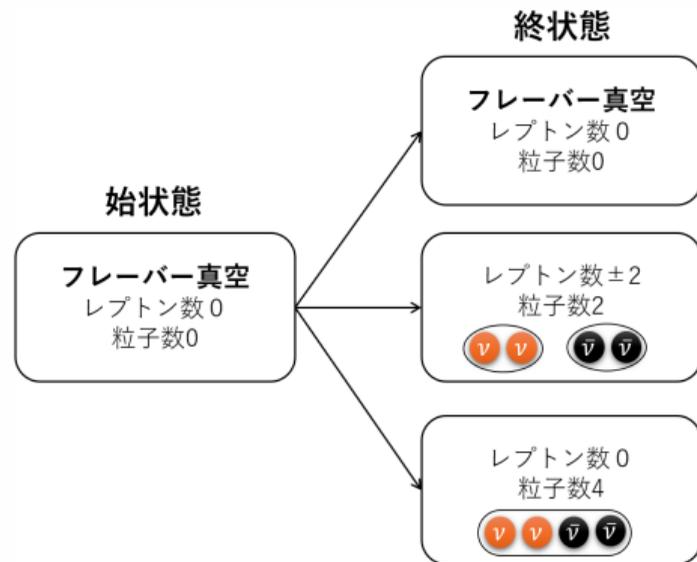


Figure: 固有状態の重ね合わせ

① Introduction

② ハミルトニアンと真空の時間発展

③ Cooper 対演算子の時間発展と Bogoliubov 変換による固有状態の時間発展

④ S 行列と振動確率

⑤ まとめと今後の展望

S 行列

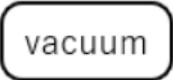
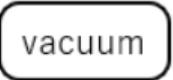
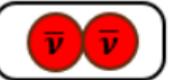
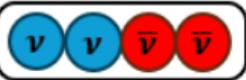
	Initial state	Final state
p sector		 or 
q sector		 or  or  or 

Figure: 各運動量における S 行列の取り方

p セクターの S 行列

\mathbf{p} sector をニュートリノ遷移が起きる運動量部分と考える。このとき、 $t = t_f$ でレプトン数 +1 を持つ状態は固有状態の時間発展により、

$$\alpha^\dagger(\mathbf{p}, t_f) |0, t_f\rangle_{\mathbf{p}} = e^{2i|\mathbf{p}|\tau} f(\mathbf{p}, \tau) \alpha^\dagger(\mathbf{p}, t_i) |0, t_i\rangle_{\mathbf{p}} + e^{2i|\mathbf{p}|\tau} (-g(\mathbf{p}, \tau)) B_\beta^\dagger(\mathbf{p}, t_i) \alpha^\dagger(\mathbf{p}, t_i) |0, t_i\rangle_{\mathbf{p}}$$

レプトン数 -1 で粒子数が 3 個の状態が現れる。この 3 粒子状態も含めてまとめると

$$\begin{pmatrix} \alpha^\dagger(\mathbf{p}, t_f) |0, t_f\rangle_{\mathbf{p}} \\ B_\beta^\dagger(\mathbf{p}, t_f) \alpha^\dagger(\mathbf{p}, t_f) |0, t_f\rangle_{\mathbf{p}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{\mathbf{p}}^{11} & S_{\mathbf{p}}^{13} \\ S_{\mathbf{p}}^{31} & S_{\mathbf{p}}^{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^\dagger(\mathbf{p}, t_i) |0, t_i\rangle_{\mathbf{p}} \\ B_\beta^\dagger(\mathbf{p}, t_i) \alpha^\dagger(\mathbf{p}, t_i) |0, t_i\rangle_{\mathbf{p}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} S_{\mathbf{p}}^{11} & S_{\mathbf{p}}^{13} \\ S_{\mathbf{p}}^{31} & S_{\mathbf{p}}^{33} \end{pmatrix} = e^{2i|\mathbf{p}|\tau} \begin{pmatrix} f(\mathbf{p}, \tau) & -g(\mathbf{p}, \tau) \\ g(\mathbf{p}, \tau) & f^*(\mathbf{p}, \tau) \end{pmatrix}$$

ここで、 $f(\mathbf{p}, \tau) = \cos E_{\mathbf{p}}\tau - i\frac{|\mathbf{p}|}{E_{\mathbf{p}}} \sin E_{\mathbf{p}}\tau$ 、 $g(\mathbf{p}, \tau) = \frac{m}{E_{\mathbf{p}}} \sin E_{\mathbf{p}}\tau$ である。また、 $\beta^\dagger(\mathbf{p}, t_f)$ を考えた場合も同様の行列成分が現れる。

q セクターの S 行列

\mathbf{p} sector 以外の運動量部分で真空の時間発展のみをしている部分を \mathbf{q} sector とする。ここで、正規化していた $|2, t\rangle_{\mathbf{q}}$ を各 Cooper 対演算子で分けた $|+2, t\rangle_{\mathbf{q}}$ と $|-2, t\rangle_{\mathbf{q}}$ に書き換える。

$$|+2, t_f\rangle_{\mathbf{q}} = B_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{p}, t_f) |0, t_f\rangle_{\mathbf{q}}, \quad |-2, t_f\rangle_{\mathbf{q}} = B_{\beta}^{\dagger}(\mathbf{p}, t_f) |0, t_f\rangle_{\mathbf{q}}$$

ここで、 $|\theta_1, t\rangle_{\mathbf{q}} = |0, t\rangle_{\mathbf{q}}$, $|\theta_2, t\rangle_{\mathbf{q}} = |+2, t\rangle_{\mathbf{q}}$, $|\theta_3, t\rangle_{\mathbf{q}} = |-2, t\rangle_{\mathbf{q}}$, $|\theta_4, t\rangle_{\mathbf{q}} = |4, t\rangle_{\mathbf{q}}$ とする。このとき

$$|\theta_j, t_f\rangle_{\mathbf{q}} = \sum_{k=1}^4 (S_{\mathbf{q}}^{jk})^* |\theta_k, t_i\rangle_{\mathbf{q}}$$

$(S_{\mathbf{q}}^{jk})^*$ の各成分は

$$e^{2i|\mathbf{p}|\tau} \begin{pmatrix} f(\mathbf{q}, \tau)^2 & -f(\mathbf{q}, \tau)g(\mathbf{q}, \tau) & -f(\mathbf{q}, \tau)g(\mathbf{q}, \tau) & g(\mathbf{q}, \tau)^2 \\ f(\mathbf{q}, \tau)g(\mathbf{q}, \tau) & |f(\mathbf{q}, \tau)|^2 & -g(\mathbf{q}, \tau)^2 & -f^*(\mathbf{q}, \tau)g(\mathbf{q}, \tau) \\ f(\mathbf{q}, \tau)g(\mathbf{q}, \tau) & -g(\mathbf{q}, \tau)^2 & |f(\mathbf{q}, \tau)|^2 & -f^*(\mathbf{q}, \tau)g(\mathbf{q}, \tau) \\ g(\mathbf{q}, \tau)^2 & f^*(\mathbf{q}, \tau)g(\mathbf{q}, \tau) & f^*(\mathbf{q}, \tau)g(\mathbf{q}, \tau) & (f^*(\mathbf{q}, \tau))^2 \end{pmatrix}$$

ニュートリノ振動確率

$v^2 = \frac{|\mathbf{p}|^2}{E_{\mathbf{p}}^2}$, $1 - v^2 = \frac{m^2}{E_{\mathbf{p}}^2}$ として、ニュートリノの振動確率とレプトン数の時間変化の期待値について議論する。

- $P_{\nu \rightarrow \nu}(\mathbf{p}, \tau)$ (survival probability)

$$\begin{aligned} P_{\nu \rightarrow \nu}(\mathbf{p}, \tau) &= |\langle +1, t_f | +1, t_i \rangle|^2 \\ &= \left(\prod_{\mathbf{q} \neq \mathbf{p} \in A} \sum_{j=1}^4 \left| \langle \theta_j, t_f | \theta_1, t_i \rangle_{\mathbf{q}} \right|^2 \right) \left| \langle +1, t_f | +1, t_i \rangle_{\mathbf{p}} \right|^2 \\ &= 1 - (1 - v^2) \sin^2 E_{\mathbf{p}} \tau \end{aligned}$$

- $P_{\nu \rightarrow \nu \bar{\nu} \bar{\nu}}(\mathbf{p}, \tau)$ (chiral probability)

$$\begin{aligned} P_{\nu \rightarrow \nu \bar{\nu} \bar{\nu}}(\mathbf{p}, \tau) &= |\langle -1, t_f | +1, t_i \rangle|^2 \\ &= \left(\prod_{\mathbf{q} \neq \mathbf{p} \in A} \sum_{j=1}^4 \left| \langle \theta_j, t_f | \theta_1, t_i \rangle_{\mathbf{q}} \right|^2 \right) \left| \langle -1, t_f | +1, t_i \rangle_{\mathbf{p}} \right|^2 \\ &= (1 - v^2) \sin^2 E_{\mathbf{p}} \tau \end{aligned}$$

ニュートリノ振動確率

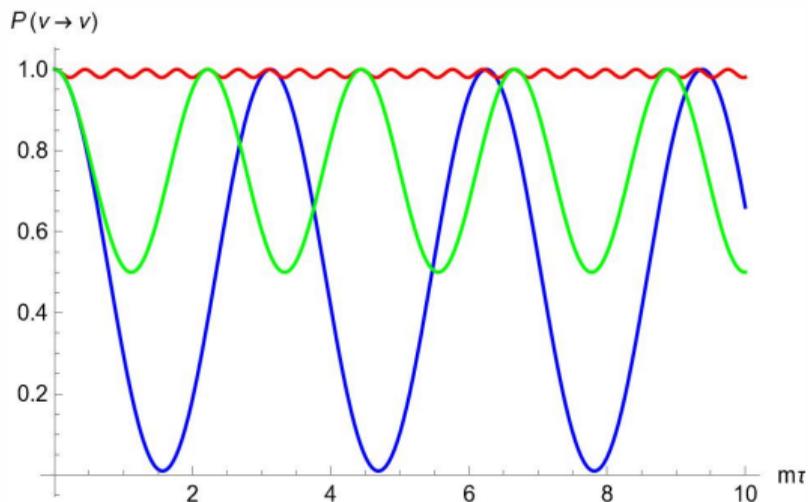


Figure: $P_{\nu \rightarrow \nu}(\mathbf{p}, \tau)$

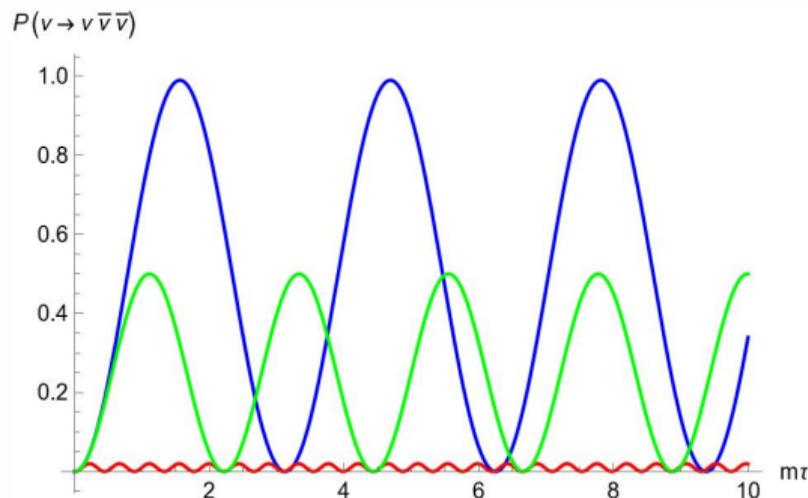


Figure: $P_{\nu \rightarrow \bar{\nu} \bar{\nu}}(\mathbf{p}, \tau)$

$v = 0.99$ (relativistic case) の場合赤線、 $v = 0.1$ (non-relativistic case) の場合青線、 $v = \frac{1}{\sqrt{2}}$ の場合緑線となっている。

振動確率とレプトン数の時間変化

レプトン数の時間変化の期待値との関係

レプトン数の時間変化の期待値との期待値の結果と比較すると

$$\begin{aligned}\langle \nu(\mathbf{p}, t_i) | L(\mathbf{p}, \tau) | \nu(\mathbf{p}, t_i) \rangle &= v^2 + (1 - v^2) \cos(2E_{\mathbf{p}}\tau) \\ &= P_{\nu \rightarrow \nu}(\mathbf{p}, \tau) - P_{\nu \rightarrow \nu \bar{\nu}}(\mathbf{p}, \tau)\end{aligned}$$

超相対論的極限では $|\mathbf{p}|^2 \gg m^2$ であるから $v^2 \approx 1$ となり、以上の結果は量子力学における結果とも一致する。

振動確率とレプトン数の時間変化

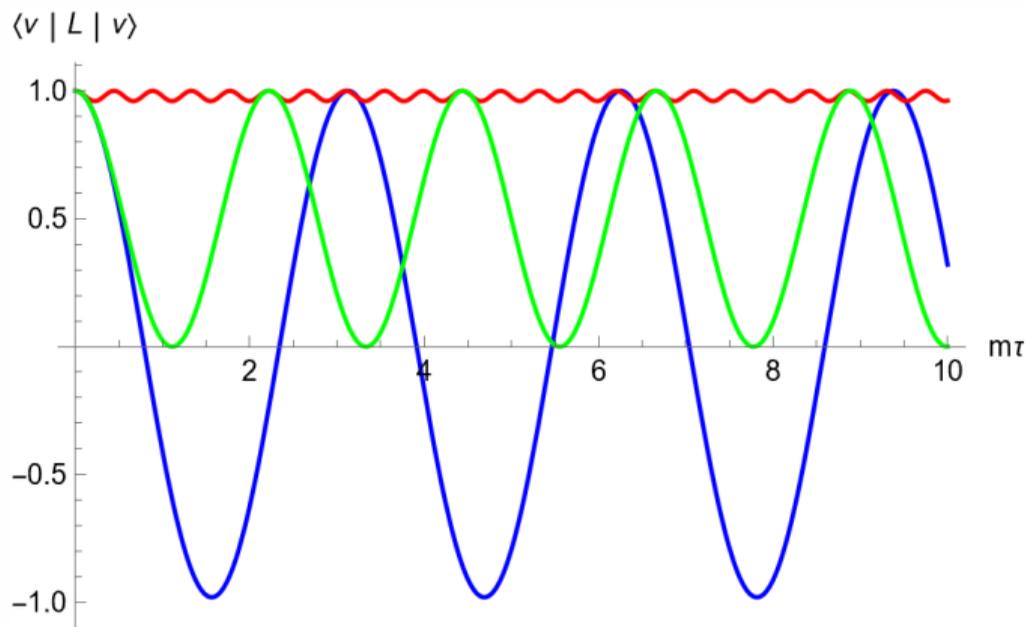


Figure: レプトン数の時間変化の期待値

図の ν の条件は先ほどの確率と同様。(赤： $v = 0.99$ (relativistic case)、青： $v = 0.1$ (non-relativistic case)、緑： $v = \frac{1}{\sqrt{2}}$)

① Introduction

② ハミルトニアンと真空の時間発展

③ Cooper 対演算子の時間発展と Bogoliubov 変換による固有状態の時間発展

④ S 行列と振動確率

⑤ まとめと今後の展望

まとめと今後の展望

まとめ

- Bogoliubov 変換により、時間発展するとレプトン数 0 の真空は偶数個のレプトン数に依存する固有状態の重ね合わせが現れた。
- 実際に観測する際には、運動量 \mathbf{p} の部分だけが振動確率に効いてくることが分かった。
- レプトン数が $+1 \rightarrow -1$ になる遷移は、 $\nu \rightarrow \bar{\nu}$ ではなく真空の時間発展からの寄与により $\nu \rightarrow \nu\bar{\nu}$ となる。
- レプトン数の時間変化の期待値はニュートリノの生き残り確率とカイラル振動確率の差で書けることが分かった。

今後の展望

- 3 世代に拡張し、フレーバー振動の確率を導出すること。
- 物質効果を考慮して振動確率を求める。

ゼロモードの拘束条件と反交換関係

1フレーバーのマヨラナニュートリノについて、その作用を経路積分形式で定式化することから始める。

$$\int d\eta d\eta^\dagger \int d\xi_0 d\xi_0^\dagger e^{iS'[\eta, \xi_0]} = \int \int d\eta d\eta^\dagger \delta(\eta_0) \delta(\eta_0^\dagger) e^{iS[\eta]},$$

右辺の $S[\eta]$ は、質量 m を持つ1フレーバーのマヨラナニュートリノの作用であり、これを2成分のカイラル場 η を用いて表す。

$$S[\eta] = \int d^4x \mathcal{L}, \quad \mathcal{L} = \eta^\dagger (i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu) \eta - \frac{m}{2} (-\eta^\dagger i\sigma_2 \eta^* + \eta^T i\sigma_2 \eta).$$

左辺の $S'[\eta]$ は、

$$S'[\eta, \xi_0] = S[\eta] - i \int dt (\xi_0^\dagger \eta_0 - \eta_0^\dagger \xi_0) = \int d^4x \mathcal{L}',$$

ここで \mathcal{L}' は、

$$\mathcal{L}' = \eta^\dagger (i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu) \eta - \frac{m}{2} (-\eta^\dagger i\sigma_2 \eta^* + \eta^T i\sigma_2 \eta) - \frac{i}{V} (\xi_0^\dagger \eta_0 - \eta_0^\dagger \xi_0).$$

ラグランジアン密度 \mathcal{L}' に対応するハミルトニアン H

\mathcal{L}' は、典型的な拘束条件を持つ。表では、すべての拘束条件とゲージ固定のような条件を示している。

constraints	ϕ^1	ϕ^2	ϕ^3	ϕ^4	ϕ^5	ϕ^6	ϕ^7	ϕ^8
	$\pi_\eta - i\eta^\dagger$	π_{η^\dagger}	η_0	η_0^\dagger	$\pi_{\xi_0},$	$\pi_{\xi_0^\dagger}$	ξ_0	ξ_0^\dagger

Table: Constraints $\phi_i = 0$ ($i = 1 \sim 8$)

ディラック括弧に基づき、場の間で反交換関係を定める。これにより場を量子化することができる。今回は η, η^\dagger の反交換関係に注目する。

$$\{\eta(\mathbf{x}, t), \eta^\dagger(\mathbf{y}, t)\} = \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - \frac{1}{V},$$

$$\{\eta(\mathbf{x}, t), \eta(\mathbf{y}, t)\} = \{\eta^\dagger(\mathbf{x}, t), \eta^\dagger(\mathbf{y}, t)\} = 0.$$

この反交換関係から η, η^\dagger はゼロモードを除外されている。

→ $\{\eta_0, \eta_0^\dagger\} = \{\eta_0, \eta_0\} = \{\eta_0^\dagger, \eta_0^\dagger\} = 0$ である。

したがって、ハミルトニアンはゼロモードを除いた $\eta(\mathbf{x}, t), \eta^\dagger(\mathbf{x}, t)$ の場に関して展開できる。