素粒子模型と例外群

信州大学理学部
川村嘉春
@ KEK
2017年7月18日

Exceptional Groups as Symmetries of Nature '17

内容

1．　素粒子と群

（群の役割，標準模型と群）

2．力の統一と群

（標準模型を超えて：その1）

3．世代の統合と群

（標準模型を超えて：その2）

１．素粒子と群
（群の役割，標準模型と群）

- 群とは?
- なぜ, 群なのか?
- 標準模型と群

・群とは?　以下の公理を満たす集合を 群 という。

群の公理

元（要素）　集合　元の積

(1) $g, h \in G$に対して, $gh \in G$

結合則

(2) $g, h, k \in G$に対して, $(gh)k = g(hk) \in G$

(3) 任意の$g \in G$に対して, $ge = eg = g \in G$

となる$e \in G$が1つ存在する。

単位元

(4) 任意の$g \in G$に対して, $gg^{-1} = g^{-1}g = e \in G$

となる$g^{-1} \in G$が1つ存在する。

逆元

・なぜ，群なのか?

物理系が有する「対称性」の定式化

||

「変換 のもとでの 不変性」

変換 が 群 をなす（場合が多い）！

➔ “変換群”

自然界は対称性を好む！
素粒子も対称性を好む！

・運動の仕方が決まる！

➔素粒子の運動項　例：ローレンツ共変性

・相互作用の仕方が決まる！

➔素粒子の相互作用項

例：ゲージ対称性

・物体の存在形態が決まる！

➔素粒子の分類・統合

・標準模型と群

標準模型が有する対称性

並進不変性

本義ローレンツ変換不変性

CPT不変性

ゲージ対称性

$$\underbrace{SU(3)_C}_{\text{強い力}} \times \underbrace{SU(2)_L \times U(1)_Y}_{\text{電弱力}}$$

（近似的）フレーバー対称性

標準模型において様々な対称性が存在するが，いずれにせよ，標準模型の枠内で例外群は現れない!

標準模型の謎

なぜ，４次元時空？

なぜ，３つの力？

なぜ，３世代の物質粒子？

ヒッグス粒子の起源は？

➔ なぜ，標準模型？

重力？暗黒物質？・・・

標準模型を超えて

１９９０年頃に受けた衝撃

【LEPの成果】

・Ｚ ボソンの崩壊幅の精密測定

　➔ ニュートリノは3種類

・ゲージ結合定数の精密測定

　➔ ゲージ結合定数の統一

【ゲージ結合定数の統一】

複数の興味深いことを示唆する。

☆10^{16}GeVあたりで3つのゲージ相互作用が統一される。

$$\boxed{SU(3)\times SU(2)\times U(1)\subset G_{\mathrm{U}}}$$ ➔ 力の大統一

☆10^{3}GeVあたりにスーパーパートナーが存在する。 ➔ 超対称性

☆10^{3}GeVあたりから10^{16}GeVあたりまで大砂漠の可能性がある。

➔13桁も上の物理を知るチャンス!

２．力の統一と群

（標準模型を超えて：その1）

なぜ?　統一されると美しい！

・力は統一の歴史?
・電荷の量子化
・異常項の相殺
・クォークとレプトンの統合

・力は統一の歴史?

電気
磁気
電磁力

弱い力
電弱理論

強い力
量子色力学

大統一理論?

標準模型

ゲージ原理に基づく力の統一

ゲージ原理

➔ 素粒子にはたらく力の法則

↓ 高いゲージ対称性

力の統一

$$SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$$

$$\subset SU(5),\ SU(5)\times U(1)$$
$$\subset SO(10),\ SO(10)\times U(1)$$
$$\subset E_6$$

力の統一

$$SO(10) \supset SU(5) \supset SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$$

【ゲージ粒子】

$$G_\mu^\alpha : (8,1)_0 \qquad W_\mu^a : (1,3)_0 \qquad B_\mu : (1,1)_0$$

$$24 = (8,1)_0 + (1,3)_0 + (1,1)_0 + \boxed{(3,2)_{-5/6} + (\bar{3},2)_{5/6}}$$

$$\Rightarrow 45$$

$$X_\mu,\ Y_\mu$$

カラーを持った未知の粒子?

物質の統合

$$SU(5) \supset SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$$

$$\bar{5} = (\bar{3}, 1)_{1/3} + (1, 2)_{-1/2}$$

d^c $\quad$ l

$$10 = (3, 2)_{1/6} + (\bar{3}, 1)_{-2/3} + (1, 1)_1$$

q $\quad$ u^c $\quad$ e^c

$$1 = (1, 1)_0$$

ν^c

物質の部分的な統合

世代内ですら, 物質場の統合が不完全?

$$SO(10) \supset SU(5) \times U(1)$$

$$16 = \bar{5} + 10 + 1$$

$\left(d^c, l\right)$ $\left(q, u^c, e^c\right)$ ν^c

世代内での物質場の完全な統合！

湯川相互作用

$$\sum_{a,b=1}^{3} f_{ab} 16_a 16_b 10_{\mathrm{H}} + \mathrm{h.c.}$$

$$M^{\mathrm{u}}_{ab}, M^{\mathrm{d}}_{ab} \propto f_{ab} \quad \xrightarrow[V^{\mathrm{u}}_L = V^{\mathrm{d}}_L]{} \quad U_{\mathrm{KM}} = V^{\mathrm{u}\dagger}_L V^{\mathrm{d}}_L = I$$

このままではフレーバー混合が起こらない?

$$E_6 \supset SO(10)\times U(1)$$

$$27 = 16 + 10 + 1$$

$$\begin{cases} 16 \Rightarrow \bar{5} + 10 + 1 \\ 10 \Rightarrow 5 + \bar{5} \end{cases}$$

$SO(10) \supset SU(5)\times U(1)$

世代内での物質場の完全な統合！

余分な物質場を自動的に含む！

➔質量階層性, フレーバー混合の素！

前川さんのトーク参照

E_6 に基づく大統一理論 (E_6 GUT) は有望！

世代内での物質場の完全な統合！

余分な物質場を自動的に含む！

（例） $27 = 16 + 10 + 1$

Anomaly free！

Chiral structure！

cf. $E_7 \supset E_6 \times U(1)$

$56 = 27 + \overline{27} + 1 + 1$

non-chiral

E_6 に基づく大統一理論 (E_6 GUT) は有望！

E_6 GUTを検証するための予言・証拠探しをしよう。

$$E_6 \supset SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y \times \underline{U(1)_\xi \times U(1)_\varsigma}$$

ヒント：余分なゲージ対称性を含む。

E_6 GUTの予言・証拠探し

☆ ゲージ結合定数の統一

$$SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y \subset E_6$$

$$G_\mu^\alpha(x), \quad W_\mu^a(x), \quad B_\mu(x) \in A_\mu^{\hat{\alpha}}(x) \quad (\hat{\alpha} = 1, 2, \cdots, 78)$$

$$g_3 \equiv g_s, \quad g_2 \equiv g, \quad g_1 \equiv \sqrt{5/3}\, g'$$

$$g_3 = g_2 = g_1\big|_{M_U} = g_U$$

☆ 陽子崩壊

☆ フェルミオンの質量, フレーバー混合

【戦略】

スーパーパートナーが見つかったとする。

スーパーパートナーの質量など ⟷ Soft SUSY breaking parameters @ M_U 大統一スケール

繰り込み群

↑

近未来の実験

↕

大統一スケールの物理 10^{16}GeV

SUSY E_6 GUTの予言・証拠探しとして，以下のものが追加される。

☆ ゲージーノの統合に伴う質量の一致

☆ スカラー粒子の統合に伴う質量の間に成立する関係式

☆ ゲージーノの統合に伴う質量の一致

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 \Big|_{M_U} = \alpha_U$$

$$\alpha_a = \frac{g_a^2}{4\pi}$$

$$(a = 1,2,3)$$

$$M_1 = M_2 = M_3 \Big|_{M_U} = M_{1/2}$$

$$\mu \frac{d}{d\mu}\left(\frac{M_a}{\alpha_a}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{M_a}{\alpha_a} = 一定$$

1 loop level

$$\frac{M_1}{\alpha_1} = \frac{M_2}{\alpha_2} = \frac{M_3}{\alpha_3}\Bigg|_{\mu \le M_U} = \frac{M_{1/2}}{\alpha_U} = 一定$$

☆ ゲージーノの統合に伴う質量の一致

$$\left.\frac{M_1}{\alpha_1} = \frac{M_2}{\alpha_2} = \frac{M_3}{\alpha_3}\right|_{\mu \le M_U} = \frac{M_{1/2}}{\alpha_U} = \text{一定}$$

1 loop level

- 大統一群によらない。 $G_{SM} (\subset SU(5)) \subset G_U$
- 対称性の破れの形態によらない。
- 物質粒子の内容によらない。
- きれいなシグナル。

$$\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 \big|_{M_Z} \cong 1:2:6 \Rightarrow M_1 : M_2 : M_3 \big|_{O(1)TeV} \approx 1:2:6$$

☆ スカラー粒子の統合に伴う質量の間に成立する関係式

ゲージ対称性を反映し，ゲージ対称性の破れの形態に依存する。

Y.K., H. Murayama and M. Yamaguchi,
"Probing the symmetry-breaking pattern using sfermion masses",
Phys. Lett. B **324**, (1994) 52-58.

Y.K., H. Murayama and M. Yamaguchi,
"Low-energy effective Lagrangian in unified theories with nonuniversal supersymmetry-breaking terms",
Phys. Rev. D **51**, (1995) 1337-1352.

$$SU(5) \supset SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$$

$$\bar{5} = (d_R)^c : \left(\bar{3}, 1, \frac{1}{3}\right) + l_{1L} : \left(1, 2, -\frac{1}{2}\right)$$

$$10 = q_{1L} : \left(3, 2, \frac{1}{6}\right) + (u_R)^c : \left(\bar{3}, 1, -\frac{2}{3}\right) + (e_R)^c : (1, 1, 1)$$

$$1 = (\nu_{eR})^c : (1, 1, 0)$$

$$m^2_{\tilde{d}^*_R} = m^2_{\tilde{l}_{1L}} \big|_{M_{\mathrm{U}}} = m^2_{\bar{5}_1}$$

$$m^2_{\tilde{q}_{1L}} = m^2_{\tilde{u}^*_R} = m^2_{\tilde{e}^*_R} \big|_{M_{\mathrm{U}}} = m^2_{10_1}$$

第2, 第3世代も同様。

$$SO(10) \supset SU(5) \times U(1)_x$$

$$\boxed{16 = \overline{5} + 10 + 1}$$

$$\left(\mathrm{d}^{\mathrm{c}}, \mathrm{l}_1\right)\left(\mathrm{q}_1, \mathrm{u}^{\mathrm{c}}, \mathrm{e}^{\mathrm{c}}\right) \nu_{\mathrm{e}}^{\mathrm{c}}$$

世代内での物質場の完全な統合！

$$m^2_{\tilde{d}^*_R} = m^2_{\tilde{l}_{1L}} = m^2_{\tilde{q}_{1L}} = m^2_{\tilde{u}^*_R} = m^2_{\tilde{e}^*_R}\Big|_{M_{\mathrm{U}}} = m^2_{16_1}$$

を期待するが，実際は対称性の破れの効果により有意なずれが生じる可能性がある。

D項からの寄与が存在する可能性がある。

$$\frac{1}{2}\sum_\alpha \left(g_\alpha D^\alpha\right)^2 = \frac{1}{2}\sum_\alpha g_\alpha^2 \left(\sum_H \Phi_H^\dagger T^\alpha \Phi_H + \sum_k \phi_k^\dagger T^\alpha \phi_k\right)^2$$

$$= \sum_\alpha g_\alpha^2 \left\langle \sum_H \Phi_H^\dagger T^\alpha \Phi_H \right\rangle \sum_k \phi_k^\dagger T^\alpha \phi_k + \cdots$$

$$T^a \phi_k = q_k^a \phi_k$$

$$T^a \Phi_H = q_H^a \Phi_H$$

$$= \sum_k m_{\mathrm{D}k}^2 \left|\phi_k\right|^2 + \cdots$$

未知量として扱う。

$$m_{\mathrm{D}k}^2 = \sum_a g_a^2 q_k^a \left\langle \sum_H q_H^a \left|\Phi_H\right|^2 \right\rangle = \sum_a g_a^2 q_k^a \underline{\left\langle D^a \right\rangle}$$

壊れたU(1)チャージに依存する。

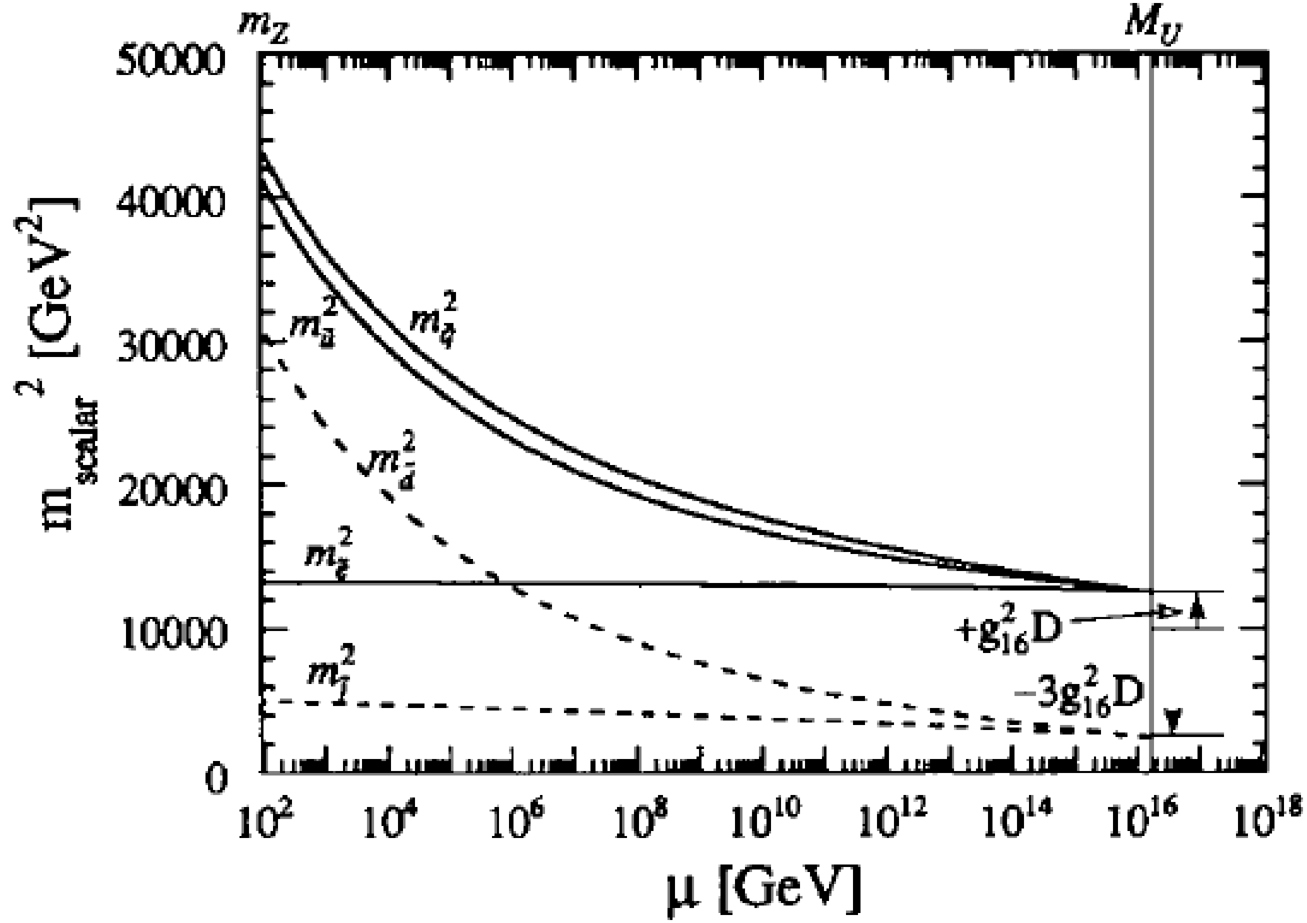

Fig. 1. A typical evolution of the scalar masses under the "direct" breaking of $SO(10) \to G_{SM}$. S in Eq. (12) is taken to be zero.

$$m^2_{\tilde{q}_{1L}} = m^2_{\tilde{u}^*_R} = m^2_{\tilde{e}^*_R}\,|_{M_U} = m^2_{16_1} + g^2_{16}D$$

$$m^2_{\tilde{d}^*_R} = m^2_{\tilde{l}_{1L}}\,|_{M_U} = m^2_{16_1} - 3g^2_{16}D$$

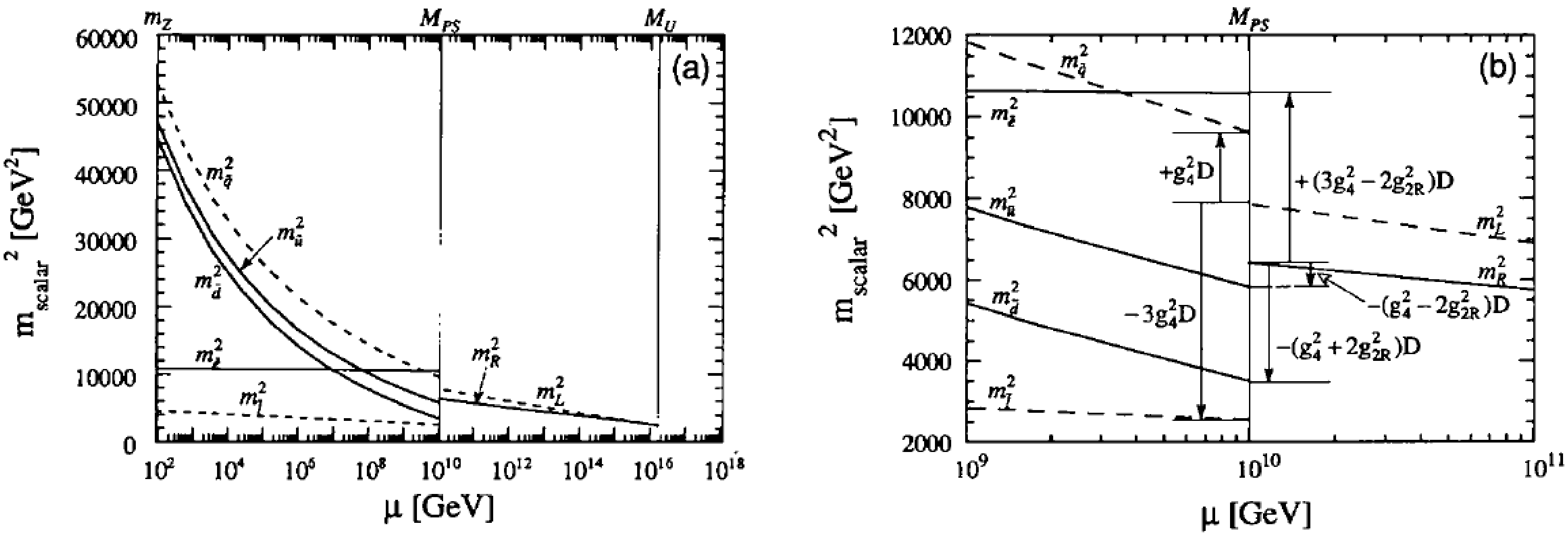

Fig. 2. A typical evolution of the scalar masses under the chain breaking $SO(10) \to SU(4)_{\rm PS} \times SU(2)_L \times SU(2)_R \to G_{\rm SM}$. The D-term contributions to the scalar masses are depicted in Fig. 2b so that the relations (30) and (31) are visible. S in Eq. (12) is taken to be zero.

$$m^2_{\tilde{q}_{1L}}\,|_{M_{\rm PS}} = m^2_{L1} + g_4^2 D$$

$$m^2_{\tilde{l}_{1L}}\,|_{M_{\rm PS}} = m^2_{L1} - 3g_4^2 D$$

$$m^2_{\tilde{u}^*_R}\,|_{M_{\rm PS}} = m^2_{R1} - (g_4^2 - 2g_{2R}^2)D$$

$$m^2_{\tilde{d}^*_R}\,|_{M_{\rm PS}} = m^2_{R1} - (g_4^2 + 2g_{2R}^2)D$$

$$m^2_{\tilde{e}^*_R}\,|_{M_{\rm PS}} = m^2_{R1} + (3g_4^2 - 2g_{2R}^2)D$$

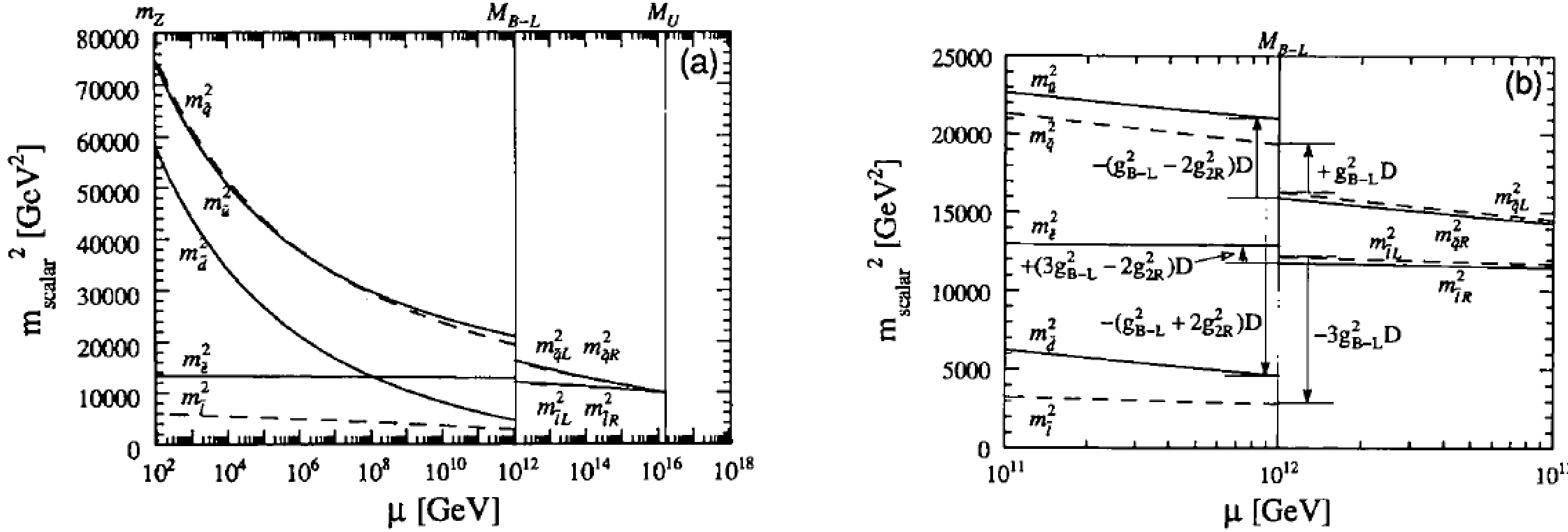

Fig. 3. A typical evolution of the scalar masses under the chain breaking $SO(10) \to SU(3)_C \times SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_{B-L} \to G_{SM}$. The D-term contributions to the scalar masses are depicted in Fig. 3b. S in Eq. (12) is taken to be zero.

$$m^2_{\tilde{q}_{1L}}\,|_{M_{SB}} = m^2_{qL1} + g^2_{B-L}D$$

$$m^2_{\tilde{l}_{1L}}\,|_{M_{SB}} = m^2_{lL1} - 3g^2_{B-L}D$$

$$m^2_{\tilde{u}^*_R}\,|_{M_{SB}} = m^2_{qR1} - (g^2_{B-L} - 2g^2_{2R})D$$

$$m^2_{\tilde{d}^*_R}\,|_{M_{SB}} = m^2_{qR1} - (g^2_{B-L} + 2g^2_{2R})D$$

$$m^2_{\tilde{e}^*_R}\,|_{M_{SB}} = m^2_{lR1} + (3g^2_{B-L} - 2g^2_{2R})D$$

☆ スカラー粒子の統合に伴う質量の間に成立する関係式

ゲージーノの質量とは相補的な特徴

・大統一群による。

・対称性の破れの形態による。

➔大統一群やゲージ対称性の破れ方を特定できる!

➔SUSY E_6 GUTの検証に使える!

スカラー粒子の質量を用いたSUSY E_6 GUTの検証

$$E_6 \supset SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y \times \underline{U(1)_\xi \times U(1)_\varsigma}$$

➔ 余分なゲージ対称性を含む。

- 対称性の破れの形態による。
- 粒子の指定（出所）が多数存在する。
- 粒子混合の効果やそれが世代ごとに異なる可能性もある。

・対称性の破れの形態による。

$$E_6 \supset \begin{cases} SO(10)\times U(1) \\ SU(6)\times SU(2) \\ SU(3)\times SU(3)\times SU(3) \end{cases}$$

（例）

$$\begin{aligned} E_6 &\to SO(10) \\ &\to SU(3)_C \times SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_{B-L} \\ &\to SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y \end{aligned}$$

・粒子の指定（出所）が多数存在する。

$$E_6 \supset SO(10)\times U(1)_3$$
$$\supset SU(5)\times U(1)_2 \times U(1)_3$$
$$\supset SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_1 \times U(1)_2 \times U(1)_3$$

$$27 = 16_1 + 10_{-2} + 1_4$$
$$= \left(\bar{5}_3 + 10_{-1} + 1_{-5}\right)_1 + \left(5_2 + \bar{5}_{-2}\right)_{-2} + \left(1_0\right)_4$$
$$= \left\{\boxed{\left(\bar{3},1\right)_2} + \boxed{\left(1,2\right)_{-3}}\right\}_{3,1}$$
$$+ \left\{\boxed{\left(3,2\right)_1} + \boxed{\left(\bar{3},1\right)_{-4}} + \boxed{\left(1,1\right)_6}\right\}_{-1,1} + \left\{\boxed{\left(1,1\right)_0}\right\}_{-5,1}$$
$$+ \left\{\left(3,1\right)_{-2} + \boxed{\left(1,2\right)_3}\right\}_{2,-2} + \left\{\boxed{\left(\bar{3},1\right)_2} + \boxed{\left(1,2\right)_{-3}}\right\}_{-2,2} + \left\{\boxed{\left(1,1\right)_0}\right\}_{0,4}$$

u^c(?) l(?)
d^c(?) e^c(?)
q

Georgi-Glashow SU(5)

$$Y=\frac{1}{6}Q_1$$

$$16\begin{cases}\bar{5}=(\bar{3},1)_{2,3,1}^{\,d^c}+(1,2)_{-3,3,1}^{\,l}\\ 10=(3,2)_{1,-1,1}^{\,q}+(\bar{3},1)_{-4,-1,1}^{\,u^c}+(1,1)_{6,-1,1}^{\,e^c}\\ 1=(1,1)_{0,-5,1}\end{cases}$$

$$10\begin{cases}5=(3,1)_{-2,2,-2}+(1,2)_{3,2,-2}\\ \bar{5}=(\bar{3},1)_{2,-2,-2}^{\,d'^c}+(1,2)_{-3,-2,-2}^{\,l'}\end{cases}$$

$$1=(1,1)_{0,0,4}$$

$$\begin{aligned}E_6&\supset SO(10)\times U(1)_3\\&\supset SU(5)\times U(1)_2\times U(1)_3\\&\supset SU(3)_C\times SU(2)_L\times U(1)_1\times U(1)_2\times U(1)_3\end{aligned}$$

Flipped SU(5)

$$Y = -\frac{1}{30}Q_1 - \frac{1}{5}Q_2$$

$$16 \begin{cases} \bar{5} = (\bar{3},1)^{u^c}_{2,3,1} + (1,2)^{l}_{-3,3,1} \\ 10 = (3,2)^{q}_{1,-1,1} + (\bar{3},1)^{d^c}_{-4,-1,1} + (1,1)_{6,-1,1} \\ 1 = (1,1)^{e^c}_{0,-5,1} \end{cases}$$

$$10 \begin{cases} 5 = (3,1)_{-2,2,-2} + (1,2)^{l'}_{3,2,-2} \\ \bar{5} = (\bar{3},1)^{d'^c}_{2,-2,-2} + (1,2)_{-3,-2,-2} \end{cases}$$

$$1 = (1,1)_{0,0,4}$$

$$\begin{aligned} E_6 &\supset SO(10) \times U(1)_3 \\ &\supset SU(5)_F \times U(1)_2 \times U(1)_3 \\ &\supset SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_1 \times U(1)_2 \times U(1)_3 \end{aligned}$$

Aligned SU(5)

$$Y = -\frac{1}{30}Q_1 + \frac{1}{20}Q_2 + \frac{1}{4}Q_3$$

N. Haba., C. Hattori, M. Matsuda, T. Matsuoka and D. Mochinaga, “The Aligned SU(5)×U(1)² Model”, *Prog. Theor. Phys.* 94, (1995) 233-247.

$$16\begin{cases} \bar{5} = (\bar{3},1)^{d^c}_{2,3,1} + (1,2)_{-3,3,1} \\ 10 = (3,2)^{q}_{1,-1,1} + (\bar{3},1)^{d'^c}_{-4,-1,1} + (1,1)_{6,-1,1} \\ 1 = (1,1)_{0,-5,1} \end{cases}$$

$SU(5)_{F'}$ に相当 ←

Y.K. and M. Tanaka, “Scalar Mass Spectrum as a Probe of E_6 Gauge Symmetry Breaking”, *Prog. Theor. Phys.* 91, (1994) 949-957.

$$10\begin{cases} 5 = (3,1)_{-2,2,-2} + (1,2)^{l}_{3,2,-2} \\ \bar{5} = (\bar{3},1)^{u^c}_{2,-2,-2} + (1,2)^{l'}_{-3,-2,-2} \end{cases}$$

$$1 = (1,1)^{e^c}_{0,0,4}$$

$$\begin{aligned} E_6 &\supset SO(10)\times U(1)_3 \\ &\supset SU(5)_A \times U(1)_2 \times U(1)_3 \\ &\supset SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_1 \times U(1)_2 \times U(1)_3 \end{aligned}$$

・粒子混合の効果やそれが世代ごとに異なる可能性もある。

K. Inoue, K. Kojima and K. Yoshioka, "Probing flavor structure in unified theory with scalar spectroscopy", *JHEP* 07, (2007) 027.

$$
\begin{aligned}
E_6 &\supset SO(10)\times U(1)_3 \\
&\supset SU(5)\times U(1)_2\times U(1)_3 \\
&\supset SU(3)_C\times SU(2)_L\times U(1)_1\times U(1)_2\times U(1)_3
\end{aligned}
$$

（例）

$$
\begin{aligned}
27 = {} & \{\underbrace{(\bar{3},1)_2}_{\mathrm{d^c}} + \underbrace{(1,2)_{-3}}_{\mathrm{l}}\}_{3,1} \\
& + \{(3,2)_1 + (\bar{3},1)_{-4} + (1,1)_6\}_{-1,1} + \{(1,1)_0\}_{-5,1} \\
& + \{(3,1)_{-2} + (1,2)_3\}_{2,-2} + \{\underbrace{(\bar{3},1)_2}_{\mathrm{d'^c}} + \underbrace{(1,2)_{-3}}_{\mathrm{l'}}\}_{-2,2} + \{(1,1)_0\}_{0,4}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{d}^{\mathrm{c}}_R)_A &= (\bar{3},1)_{2,3,1A}\cos\theta_A + (\bar{3},1)_{2,-2,2A}\sin\theta_A \\
(\mathrm{l}_L)_A &= (1,2)_{-3,3,1A}\cos\theta_A + (1,2)_{-3,-2,2A}\sin\theta_A
\end{aligned}
$$

$A=1,2,3$（世代を指定）

Georgi-Glashow SU(5)

$$Y = \frac{1}{6} Q_1$$

$$10 = (3,2)^{q}_{1,-1,1} + (\bar{3},1)^{u^c}_{-4,-1,1} + (1,1)^{e^c}_{6,-1,1}$$

$$5 = (3,1)_{-2,2,-2} + (1,2)_{3,2,-2}$$

$$\left.\begin{aligned} \bar{5} &= (\bar{3},1)^{d^c}_{2,3,1} + (1,2)^{l}_{-3,3,1} \\ \bar{5} &= (\bar{3},1)^{d'^c}_{2,-2,-2} + (1,2)^{l'}_{-3,-2,-2} \end{aligned}\right\} \rightarrow$$

SU(2) doublet(?)

$$\left.\begin{aligned} 1 &= (1,1)_{0,-5,1} \\ 1 &= (1,1)_{0,0,4} \end{aligned}\right\} \rightarrow$$

SU(2) doublet(?)

$$\begin{aligned} E_6 &\supset SO(10) \times U(1)_3 \\ &\supset SU(5) \times U(1)_2 \times U(1)_3 \\ &\supset SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_1 \times U(1)_2 \times U(1)_3 \end{aligned}$$

$$SU(5) \times U(1)_2 \times U(1)_3 \rightarrow SU(5) \times SU(2)_E \times U(1)_4 (?)$$

E symmetry

M. Bando and T. Kugo, “Neutrino Masses in E_6 Unifications”, *Prog. Theor. Phys.* 101, (1999) 1313-1333.

$$E_6 \supset SU(6)\times SU(2)_E$$
$$\supset SU(5)\times SU(2)_E \times U(1)_4$$

$$27 = (15,1)+(\overline{6},2)$$

$$\left(q, u^c, e^c\right)$$

$$27 \begin{cases} (15,1) = (10,1)_2 + (5,1)_{-4} \\ (\overline{6},2) = (\overline{5},2)_{-1} + (1,2)_5 \end{cases}$$

$$\left(d^c, d'^c\right)$$

$$\left(l,\ \ l'\right)$$

➔ $SU(2)_E$ doublets !

$SU(2)_I$ に相当 ←

Y.K. and M. Tanaka, “Scalar Mass Spectrum as a Probe of E_6 Gauge Symmetry Breaking”, *Prog. Theor. Phys.* 91, (1994) 949-957.

ちなみに,
$SU(2)_R$ symmetry

Y.K. and M. Tanaka, "Scalar Mass Spectrum as a Probe of E_6 Gauge Symmetry Breaking", *Prog. Theor. Phys.* 91, (1994) 949-957.

$$\begin{aligned} E_6 &\supset SU(6)\times SU(2)_R \\ &\supset SU(5)_A \times SU(2)_R \times U(1)_4 \end{aligned}$$

➔ Aligned SU(5)

$$27 = (15,1) + (\bar{6},2)$$

$$27 \begin{cases} (15,1) = \overset{\mathrm{q}}{(10,1)_2} + \overset{\mathrm{l}}{(5,1)_{-4}} \\ (\bar{6},2) = \underset{\substack{(\mathrm{d}^c,\,\mathrm{u}^c) \\ (\mathrm{l}^c,\ \ \mathrm{l}')}}{(\bar{5},2)_{-1}} + \underset{\mathrm{e}^c}{(1,2)_5} \end{cases}$$

➔ $SU(2)_R$ doublets

さらに，$SU(5)_F$を部分群とした場合，$SU(2)_F$ symmetry

Y.K. and M. Tanaka, “Scalar Mass Spectrum as a Probe of E_6 Gauge Symmetry Breaking”, *Prog. Theor. Phys.* 91, (1994) 949-957.

$$E_6 \supset SU(6) \times SU(2)_F$$
$$\supset SU(5)_F \times SU(2)_F \times U(1)_4$$

$$27 = (15,1) + (\overline{6},2)$$

$$(q, d^c) \qquad l'$$

$$27 \begin{cases} (15,1) = (10,1)_2 + (5,1)_{-4} \\ (\overline{6},2) = (\overline{5},2)_{-1} + (1,2)_5 \end{cases}$$

$$(d'^c, u^c) \qquad e^c$$

$$(l^c,\ l)$$

$\rightarrow$ $SU(2)_F$ doublets

ついでに, SU(2)$_L$ symmetryの場合は?

$$E_6 \supset SU(6)\times SU(2)_L$$
$$\supset SU(5)_{C(?)}\times SU(2)_L\times U(1)_4$$

Y.K. and M. Tanaka, "Scalar Mass Spectrum as a Probe of E$_6$ Gauge Symmetry Breaking", *Prog. Theor. Phys.* 91, (1994) 949-957.

$$27=(15,1)+(\overline{6},2)$$
$$\overline{27}=(\overline{15},1)+(6,2)$$

u^c d^c d'^c e^c

$$\overline{27}\ \begin{cases}(\overline{15},1)=(\overline{10},1)_{-2}+(\overline{5},1)_4\\(6,2)=(5,2)_1+(1,2)_{-5}\end{cases}$$

q l l'

→ SU(2)$_L$ doublets

$\overline{27}$(?) どうして?

$$E_6 \supset SU(3)\times SU(3)\times SU(3)$$
$$\Rightarrow SU(3)_C \times SU(3)_L \times SU(3)_R$$

$$27 = (3,3,1) + (\bar{3},1,\bar{3}) + (1,\bar{3},3)$$

q　　d^c, u^c, d'^c　　e^c　l, l'

$$\overline{27} = (\bar{3},\bar{3},1) + (3,1,3) + (1,3,\bar{3})$$

d^c, u^c, d'^c　　q　　e^c　l, l'

$$\Leftarrow SU(3)_C \times SU(3)_R \times SU(3)_L$$

Table I. The particle assignments under maximal subgroups of E_6. We refer to the chiral multiplets as q for left-handed quark, l left-handed lepton, u right-handed up type quark, d right-handed down type quark, e right-handed charged lepton and ν right-handed neutrino. The 'exotics' are denoted as D, D^c, L, L^c and N^c whose quantum numbers under G_{SM} can be read through Table III. The superscript c represents their charge conjugated states.

Maximal Subgroup	Particle Assignment
$SO(10)\times U(1)_I$	$\mathbf{16}=(d^c, l, q, u^c, e^c, \nu^c)$, $\mathbf{10}=(D, L^c, D^c, L)$, $\mathbf{1}=N^c$ (a)
	$\mathbf{16}=(D^c, L, q, u^c, e^c, N^c)$, $\mathbf{10}=(D, L^c, d^c, l)$, $\mathbf{1}=\nu^c$ (b)
$SU(6)\times SU(2)_R$	$(\mathbf{15},\mathbf{1})=(D, l, q, D^c, N^c)$, $(\bar{\mathbf{6}},\mathbf{2})=\begin{pmatrix} d^c & L^c & e^c \\ u^c & L & \nu^c \end{pmatrix}$
$SU(6)\times SU(2)_I$	$(\mathbf{15},\mathbf{1})=(D, L, q, d^c, \nu^c)$, $(\bar{\mathbf{6}},\mathbf{2})=\begin{pmatrix} D^c & L^c & e^c \\ u^c & l & N^c \end{pmatrix}$
$SU(6)\times SU(2)_J$	$(\mathbf{15},\mathbf{1})=(D, L^c, q, u^c, e^c)$, $(\bar{\mathbf{6}},\mathbf{2})=\begin{pmatrix} d^c & l & \nu^c \\ D^c & L & N^c \end{pmatrix}$
$SU(6)\times SU(2)_L$	$(\overline{\mathbf{15}},\mathbf{1})=(D^c, e^c, \nu^c, d^c, u^c, D, N^c)$, $(\mathbf{6},\mathbf{2})=(q, L^c, L, l)$
$SU(3)_C\times SU(3)_L\times SU(3)_R$	$(\mathbf{3},\mathbf{3},\mathbf{1})=(q, D)$, $(\bar{\mathbf{3}},\mathbf{1},\bar{\mathbf{3}})=(d^c, u^c, D^c)$, $(\mathbf{1},\bar{\mathbf{3}},\mathbf{3})=\begin{pmatrix} L^c & L & l \\ e^c & \nu^c & N^c \end{pmatrix}$
$SU(3)_C\times SU(3)_L\times SU(3)_I$	$(\mathbf{3},\mathbf{3},\mathbf{1})=(q, D)$, $(\bar{\mathbf{3}},\mathbf{1},\bar{\mathbf{3}})=(D^c, u^c, d^c)$, $(\mathbf{1},\bar{\mathbf{3}},\mathbf{3})=\begin{pmatrix} L^c & l & L \\ e^c & N^c & \nu^c \end{pmatrix}$
$SU(3)_C\times SU(3)_L\times SU(3)_J$	$(\mathbf{3},\mathbf{3},\mathbf{1})=(q, D)$, $(\bar{\mathbf{3}},\mathbf{1},\bar{\mathbf{3}})=(d^c, D^c, u^c)$, $(\mathbf{1},\bar{\mathbf{3}},\mathbf{3})=\begin{pmatrix} l & L & L^c \\ \nu^c & N^c & e^c \end{pmatrix}$

Y.K. and M. Tanaka, "Scalar Mass Spectrum as a Probe of E_6 Gauge Symmetry Breaking", *Prog. Theor. Phys.* 91, (1994) 949-957.

$\supset SU(5)\times U(1)\times U(1)$

$\supset SU(5)_A\times SU(2)_R\times U(1)_4$

$\supset SU(5)\times SU(2)_E\times U(1)_4$

$\supset SU(5)_F\times SU(2)_F\times U(1)_4$

$\supset SU(5)_C\times SU(2)_L\times U(1)_4$

$\supset SU(3)_C\times SU(2)_L\times SU(2)_R\times U(1)_5$

$\supset SU(3)_C\times SU(2)_L\times SU(2)_E\times U(1)_5$

$\supset SU(3)_C\times SU(2)_L\times SU(2)_F\times U(1)_5$

Table I. The particle assignments under maximal subgroups of E_6. We refer to the chiral multiplets as q for left-handed quark, l left-handed lepton, u right-handed up type quark, d right-handed down type quark, e right-handed charged lepton and ν right-handed neutrino. The 'exotics' are denoted as D, D^c, L, L^c and N^c whose quantum numbers under G_{SM} can be read through Table III. The superscript c represents their charge conjugated states.

Maximal Subgroup	Particle Assignment	
$SO(10)\times U(1)_I$	$\boxed{16=(d^c,L^c,q,D^c,\nu^c,N^c),\quad 10=(D,l,u^c,L),\quad 1=e^c}$	$\supset SU(5)_A\times U(1)\times U(1)$
$SU(6)\times SU(2)_R$	$(15,1)=(D,l,q,D^c,N^c)$, $(\bar{6},2)=\begin{pmatrix} d^c & L^c & e^c \\ u^c & L & \nu^c \end{pmatrix}$	$\supset SU(5)_A\times SU(2)_R\times U(1)_4$
$SU(6)\times SU(2)_I$	$(15,1)=(D,L,q,d^c,\nu^c)$, $(\bar{6},2)=\begin{pmatrix} D^c & L^c & e^c \\ u^c & l & N^c \end{pmatrix}$	$\supset SU(5)\times SU(2)_E\times U(1)_4$
$SU(6)\times SU(2)_J$	$(15,1)=(D,L^c,q,u^c,e^c)$, $(\bar{6},2)=\begin{pmatrix} d^c & l & \nu^c \\ D^c & L & N^c \end{pmatrix}$	$\supset SU(5)_F\times SU(2)_F\times U(1)_4$
$SU(6)\times SU(2)_L$	$(\overline{15},1)=(D^c,e^c,\nu^c,d^c,u^c,D,N^c)$, $(6,2)=(q,L^c,L,l)$	$\supset SU(5)_C\times SU(2)_L\times U(1)_4$
$SU(3)_C\times SU(3)_L\times SU(3)_R$	$(3,3,1)=(q,D)$, $(\bar{3},1,\bar{3})=(d^c,u^c,D^c)$, $(1,\bar{3},3)=\begin{pmatrix} L^c & L & l \\ e^c & \nu^c & N^c \end{pmatrix}$	$\supset SU(3)_C\times SU(2)_L\times SU(2)_R\times U(1)_5$
$SU(3)_C\times SU(3)_L\times SU(3)_I$	$(3,3,1)=(q,D)$, $(\bar{3},1,\bar{3})=(D^c,u^c,d^c)$, $(1,\bar{3},3)=\begin{pmatrix} L^c & l & L \\ e^c & N^c & \nu^c \end{pmatrix}$	$\supset SU(3)_C\times SU(2)_L\times SU(2)_E\times U(1)_5$
$SU(3)_C\times SU(3)_L\times SU(3)_J$	$(3,3,1)=(q,D)$, $(\bar{3},1,\bar{3})=(d^c,D^c,u^c)$, $(1,\bar{3},3)=\begin{pmatrix} l & L & L^c \\ \nu^c & N^c & e^c \end{pmatrix}$	$\supset SU(3)_C\times SU(2)_L\times SU(2)_F\times U(1)_5$

Y.K. and M. Tanaka, "Scalar Mass Spectrum as a Probe of E_6 Gauge Symmetry Breaking", *Prog. Theor. Phys.* 91, (1994) 949-957.

$SU(5)\times U(1)_2\times U(1)_1$	$m_{\tilde d}^2=m_{\tilde l}^2$, $m_{\tilde u}^2=m_{\tilde q}^2=m_{\tilde e}^2$
$SU(5)_F\times U(1)_2\times U(1)_1$	$m_{\tilde q}^2-m_{\tilde d}^2=m_{\tilde u}^2-m_{\tilde l}^2$
$SU(4)\times SU(2)_L\times SU(2)_R\times U(1)_1$	$m_{\tilde l}^2-m_{\tilde q}^2=m_{\tilde d}^2-m_{\tilde e}^2$, $g_{2R}^2(m_{\tilde l}^2-m_{\tilde q}^2)=g_4^2(m_{\tilde d}^2-m_{\tilde u}^2)$, $m_2^2-m_1^2=m_{\tilde d}^2-m_{\tilde u}^2$
$SU(3)_C\times SU(2)_L\times SU(2)_R\times U(1)_{B-L}\times U(1)_1$	$m_2^2-m_1^2=m_{\tilde d}^2-m_{\tilde u}^2$
$SU(4)\times SU(2)_L\times SU(2)_I\times U(1)_1$	$g_{2I}^2(m_{\tilde q}^2-m_1^2)=g_4^2(m_{\tilde l}^2-m_2^2)$, (*) $g_{2I}^2(m_{\tilde e}^2-m_{\tilde u}^2)=(g_4^2-g_{2I}^2)(m_{\tilde l}^2-m_1^2)$ (*)
$SU(6)\times SU(2)_R$	$m_{\tilde l}^2-m_{\tilde q}^2=m_{\tilde d}^2-m_{\tilde e}^2$, $g_{2R}^2(m_{\tilde l}^2-m_{\tilde q}^2)=g_6^2(m_{\tilde d}^2-m_{\tilde u}^2)$, $m_2^2-m_1^2=m_{\tilde d}^2-m_{\tilde u}^2$
$SU(5)_{F'}\times U(1)_3\times SU(2)_R$	$m_2^2-m_1^2=m_{\tilde d}^2-m_{\tilde u}^2$
$SU(6)\times SU(2)_I$	$m_{\tilde q}^2-m_{\tilde d}^2=m_{\tilde u}^2-m_{\tilde l}^2$
$SU(5)_F\times U(1)_{3'}\times SU(2)_I$	$m_{\tilde q}^2-m_{\tilde d}^2=m_{\tilde u}^2-m_{\tilde l}^2$
$SU(6)\times SU(2)_J$	$m_{\tilde d}^2=m_{\tilde l}^2$, $m_{\tilde u}^2=m_{\tilde q}^2=m_{\tilde e}^2$
$SU(5)\times U(1)_{3''}\times SU(2)_J$	$m_{\tilde d}^2=m_{\tilde l}^2$, $m_{\tilde u}^2=m_{\tilde q}^2=m_{\tilde e}^2$
$SU(6)\times SU(2)_L$	$m_2^2-m_1^2=m_{\tilde d}^2-m_{\tilde u}^2$ $=m_{\tilde l}^2-m_{\tilde q}^2$, $m_{\tilde u}^2=m_{\tilde e}^2$
$SU(5)_{F''}\times U(1)_{3'''}\times SU(2)_L$	$m_2^2-m_1^2=m_{\tilde d}^2-m_{\tilde u}^2$, $(SU(2)_R)$ or $m_{\tilde d}^2-m_{\tilde e}^2=m_{\tilde l}^2-m_{\tilde q}^2$, $(SU(2)_I)$
$SU(3)_C\times SU(3)_L\times SU(3)_R$	$m_2^2-m_1^2=m_{\tilde d}^2-m_{\tilde u}^2$, $g_{3R}^2(m_2^2-m_{\tilde e}^2)=g_{3L}^2(m_{\tilde d}^2-m_{\tilde u}^2+m_2^2-m_{\tilde l}^2)$ (*)
$SU(3)_C\times SU(3)_L\times SU(2)_R\times U(1)_R$	$m_2^2-m_1^2=m_{\tilde d}^2-m_{\tilde u}^2$
$SU(3)_C\times SU(2)_L\times U(1)_L\times SU(3)_R$	$m_2^2-m_1^2=m_{\tilde d}^2-m_{\tilde u}^2$

超対称性E_6大統一理論の拡張

- Family symmetry 等の導入

（例）　$E_6 \times SU(2)_F \times U(1)_A$

N. Maekawa, Y. Muramatsu and Y. Shigekami, "Sizable D-term contribution as a signature of the $E_6 \times SU(2)_F \times U(1)_A$ SUSY GUT model", *Prog. Theor. Exp. Phys.* 2014, (2014) 113B02.

- Extra dimensions の導入

（例）　$M^4 \times \left(S^1 / Z_2 \right)$　$M^4 \times \left(T^2 / Z_N \right)$

Y.K. and T. Miura, "Classification of standard model particles in E_6 orbifold grand unified theories", *Int. J. Mod. Phys.* A28, (2013) 1350055.

・Extra dimensions の導入

Y.K. and T. Miura, "Classification of standard model particles in E_6 orbifold grand unified theories", *Int. J. Mod. Phys.* A28, (2013) 1350055.

余剰次元の導入により、思わぬところから物質粒子が生じる可能性がある。

$$E_6 \supset SO(10)\times U(1)_3 \supset SU(5)\times U(1)_2 \times U(1)_3$$

$$27 = 16 + 10 + 1 = (\boxed{\bar{5}} + \boxed{10} + 1) + (\boxed{\bar{5}} + 5) + 1$$

高次元上の27 ➔

$$\left\{(\boxed{\bar{5}} + \boxed{10} + 1) + (\boxed{\bar{5}} + 5) + 1\right\}_L$$

$$+ \left\{(\bar{5} + 10 + 1) + (\bar{5} + \boxed{5}) + 1\right\}_R$$

$$5_R \Rightarrow (5_R)^c = `\bar{5}_L'$$

E_6 grand unified theories on S^1/Z_2

$$E_6 \Rightarrow SU(5)\times U(1)_2 \times U(1)_3$$

$$27 \Rightarrow \left\{(\bar{5}_1 + \boxed{10} + 1) + (\bar{5}_2 + 5) + 1\right\}_L$$
$$+ \left\{(\bar{5} + 10 + 1) + (\bar{5} + \boxed{5)} + 1\right\}_R$$

$$\Rightarrow (10_L)_{-1,1} + (5_R)_{2,-2}$$

charge
conjugation

$$\Rightarrow (10_L)_{-1,1} + (\bar{5}_L)_{-2,2}$$

検証可能性は？

cf. $(\bar{5}_{1L})_{3,1} \quad (\bar{5}_{2L})_{-2,-2}$

（例） $(10_L)_{-1,1} + (\bar{5}_L)_{-2,2}$ $\Leftarrow (10_L)_{-1,1} + (5_R)_{2,-2}$

$$m_{10}^2 \equiv m_{\tilde{q}}^2 = m_{\tilde{u}^*}^2 = m_{\tilde{e}^*}^2 = m_0^2 - D_1 + D_2$$

$$m_{\bar{5}}^2 \equiv m_{\tilde{d}^*}^2 = m_{\tilde{l}}^2 = m_0^2 - 2D_1 + 2D_2$$

$$M_{24} \equiv M_3 = M_2 = M_1 = m_0$$

の場合， $2\left(m_{10}^2 - M_{24}^2\right) = m_{\bar{5}}^2 - M_{24}^2$

$(\bar{5}_{1L})_{3,1}$ $(\bar{5}_{2L})_{-2,-2}$

$$m_{\bar{5}_1}^2 = m_0^2 + 3D_1 + D_2$$

$$m_{\bar{5}_2}^2 = m_0^2 - 2D_1 - 2D_2$$

３．世代の統合と群

（標準模型を超えて：その2）

統合されると美しい!

- 世代の謎と試み
- 世代の統合
- E_8に期待！
- 超対称性 ＆ 余剰次元

・世代の謎と試み

なぜ，3世代なのか？

対称性を用いて説明できるのでは？

【対称性に基づく様々な試み】

Family symmetry

Quasi NG fermions of SUSY models

String models

Orbifold family unification models

Family symmetry

１９７０年代から，非常の多くの研究がなされている。

【例外群関連の最近の例】

N. Maekawa, “Non-Abelian horizontal symmetry and anomalous U(1) symmetry for the supersymmetric flavor problem”, *Phys. Lett.* B 561, (2003) 273-278.

$$E_6 \times SU(3)_H \times U(1)_A$$

N. Maekawa, Y. Muramatsu and Y. Shigekami, “Sizable D-term contribution as a signature of the $E_6 \times SU(2)_F \times U(1)_A$ SUSY GUT model”, *Prog. Theor. Exp. Phys.* 2014, (2014) 113B02.

Quasi NG fermions of SUSY models

【3世代模型の例】

$$E_7 / \left(SU(5) \times SU(3) \times U(1) \right)$$

coset SUSY σ model

$$\downarrow$$

$$\left(\overline{5},3\right) + \left(10,\overline{3}\right) + \left(5,1\right)$$

T. Kugo and T. Yanagida, "Unification of families based on a Coset space $E_7/SU(5)\times SU(3)\times U(1)$", *Phys. Lett.* B 134, (1984) 313-317.

F-theory の枠組での3世代の構成

S. Mizoguchi, "F-theory family unification", *JHEP* 07, (2014) 018.

String models

$E_8 \times E_8$ heterotic string theory

$\Rightarrow$ Classification of various 4-dim. models

Y. Katsuki, Y.K, T. Kobayashi, N. Ohtsubo, Y. Ono and K. Tanioka, "Z_N Orbifold Models", *Nucl. Phys.* B 341, (1990) 611-640.

$\Rightarrow 27,\ 27$ and $\overline{27}$ of E_6

T. Kimura and S. Mizoguchi, "Chiral generations on intersecting 5-branes in heterotic string theory", *JHEP* 04, (2010) 028.

$\Rightarrow E_6$ SUSY GUT with three generations

M. Ito, S. Kuwakino, N. Maekawa, S. Moriyama, K. Takahashi, K. Takei, S. Teraguchi and T. Yamashita, "E_6 grand unified theory with three generations from heterotic string theory", *Phys. Rev.* D 83, (2011) 091703(R).

Orbifold Family Unification Models

$SO(10)$ SUSY GUT on $M_4 \times \left(T^2 / Z_3 \right)$

➔ 3 adj. chiral multiplets & 3 fixed points ➔ 3 families

T. Watari and T. Yanagida, "Higher-dimensional supersymmetry as an origin of the three families for quarks and leptons", *Phys. Lett.* B 532, (2002) 252-258.

$U(N)$ SUSY YM theory on $M_4 \times \left(T^2 / Z_M \right)^3$ $M = 2,3,4,6$

➔ gauginos, magnetic fluxes & orbifolding ➔ 3 families

T. Abe, Y. Fujimoto, T. Kobayashi, T. Miura, K. Nishiwaki, M. Sakamoto and Y. Tatsuta, "Classification of three-generation models on magnetized orbifolds", *Nucl. Phys.* B 894, (2015) 374-406.

随伴表現ではないハイパー多重項による世代の統合

（1）5次元時空

$SU(N)$ $M^4 \times S^1/Z_2$

Y.K., T. Kinami and K. Oda,
"Orbifold family unification",
Phys. Rev. D**76**, (2007) 035001.

（2）6次元時空

$SU(N)$ $M^4 \times T^2/Z_M$

$M = 2,3,4,6$

Y. Goto, Y.K. and T. Miura,
"Orbifold family unification
on six dimensions", *Phys. Rev.*
D**88**, (2013) 055016.

T^2/Z_2

$SU(N) \to SU(3)_C \times SU(2)_L \times SU(p_3) \cdots \times SU(p_n) \times U(1)^r$

Examples of models with $n_{\mathrm{d^c}} = n_{\mathrm{l}} = n_{\mathrm{u^c}} = n_{\mathrm{e^c}} = n_{\mathrm{q}} = 3$

$[N,k]$	$(p_1,p_2,p_3,p_4,p_5,p_6,p_7,p_8)$	$(\alpha_+,\beta_+,\gamma_+)$	$(\alpha_-,\beta_-,\gamma_-)$
[9,3]	(3,2,0,0,0,3,0,1)	(0,1,1)	(0,1,0)
	(3,2,0,0,0,3,0,1)	(0,1,0)	(0,1,1)
	(3,2,0,0,0,3,1,0)	(0,1,1)	(0,1,0)
	(3,2,0,0,0,3,1,0)	(0,1,0)	(0,1,1)
	(3,2,0,0,3,0,0,1)	(0,1,1)	(0,1,0)
	(3,2,0,0,3,0,0,1)	(0,1,0)	(0,1,1)
	(3,2,0,0,3,0,1,0)	(0,1,1)	(0,1,0)
	(3,2,0,0,3,0,1,0)	(0,1,0)	(0,1,1)
	(3,2,0,3,0,0,0,1)	(1,0,1)	(1,0,0)
	(3,2,0,3,0,0,0,1)	(1,0,0)	(1,0,1)
	(3,2,0,3,0,0,1,0)	(1,0,1)	(1,0,0)
	(3,2,0,3,0,0,1,0)	(1,0,0)	(1,0,1)
	(3,2,3,0,0,0,0,1)	(1,0,1)	(1,0,0)
	(3,2,3,0,0,0,0,1)	(1,0,0)	(1,0,1)
	(3,2,3,0,0,0,1,0)	(1,0,1)	(1,0,0)
	(3,2,3,0,0,0,1,0)	(1,0,0)	(1,0,1)
	(3,2,0,0,1,2,0,1)	(0,1,1)	(0,1,0)
	(3,2,0,0,1,2,0,1)	(0,1,0)	(0,1,1)
	(3,2,0,0,1,2,1,0)	(0,1,1)	(0,1,0)
	(3,2,0,0,1,2,1,0)	(0,1,0)	(0,1,1)
	(3,2,0,0,2,1,0,1)	(0,1,1)	(0,1,0)
	(3,2,0,0,2,1,0,1)	(0,1,0)	(0,1,1)
	(3,2,0,0,2,1,1,0)	(0,1,1)	(0,1,0)
	(3,2,0,0,2,1,1,0)	(0,1,0)	(0,1,1)
	(3,2,1,2,0,0,0,1)	(1,0,1)	(1,0,0)
	(3,2,1,2,0,0,0,1)	(1,0,0)	(1,0,1)
	(3,2,1,2,0,0,1,0)	(1,0,1)	(1,0,0)
	(3,2,1,2,0,0,1,0)	(1,0,0)	(1,0,1)
	(3,2,2,1,0,0,0,1)	(1,0,1)	(1,0,0)
	(3,2,2,1,0,0,0,1)	(1,0,0)	(1,0,1)
	(3,2,2,1,0,0,1,0)	(1,0,1)	(1,0,0)
	(3,2,2,1,0,0,1,0)	(1,0,0)	(1,0,1)

$$\rho_{0\pm} = (-1)^{l_1+l_2+l_3+l_4}(-1)^k \eta^0_{k\pm} = (-1)^{l_1+l_2+l_3+l_4+\alpha_\pm}$$

$$\rho_{1\pm} = (-1)^{l_1+l_2+l_5+l_6}(-1)^k \eta^1_{k\pm} = (-1)^{l_1+l_2+l_5+l_6+\beta_\pm}$$

$$\rho_{2\pm} = (-1)^{l_1+l_3+l_5+l_7}(-1)^k \eta^2_{k\pm} = (-1)^{l_1+l_3+l_5+l_7+\gamma_\pm}$$

$$SU(N) \to SU(3)_C \times SU(2)_L \times SU(p_3) \cdots \times SU(p_n) \times U(1)^r$$

$$\text{parameters}: (p_3, \cdots, p_n; \alpha_\pm, \beta_\pm, (\gamma_\pm))$$

Total numbers of models with $n_{d^c} = n_l = n_{u^c} = n_{e^c} = n_q = 3$

	T^2/Z_2	T^2/Z_3	T^2/Z_4	T^2/Z_6
$SU(8)$	-	-	-	-
$SU(9)$	[9,3]:32	-	[9,3]:8	[9,3]:8 [9,4]:32
$SU(10)$	-	-	-	[10,3]:80 [10,4]:108
$SU(11)$	[11,3]:80 [11,4]:80	[11,4]:80	[11,3]:20 [11,4]:20	[11,3]:84 [11,4]:144 [11,5]:156
$SU(12)$	[12,3]:120	[12,3]:80	[12,4]:88 [12,6]:240	[12,3]:392 [12,4]:120 [12,5]:72 [12,6]:552
$SU(13)$	[13,3]:144	-	[13,4]:40	[13,3]:712 [13,4]:88 [13,5]:140 [13,6]:200

continued

・世代の統合

$$\psi_{(g)} \supset 3 \times \left\{ \psi_{SM} \right\}$$

必然性は？　➔ 特にない。

とりあえず,「力の統一」の延長として模索しよう。

$\boxed{\text{統合} \overset{\text{表裏一体}}{\Leftrightarrow} \text{対称性の破れ}}$

「世代の混合」,「質量の階層性」
➔ 制約・ヒント

「力の統一」に関して，E_6 に基づく大統一理論が魅力的だった!

↓

例外群の活用を念頭に置いて「世代の統合」について考察しよう。

・E_8 に期待！

最大のランクをもつ例外群！

E_6を含む！ $E_8 \supset E_7 \supset E_6$

弦模型に由緒があるかも！

$\boxed{E_8 \times E_8 \ \text{heterotic string theory}}$

248表現が興味深そう！

ゲージ粒子と3世代の物質粒子の統合?

248表現が興味深そう！

ゲージ粒子と3世代の物質粒子の統合?

$$E_8 \supset E_6 \times SU(3)_F$$

Mirror 粒子

$$248 = (78,1) + (1,8) + (27,3) + \boxed{\left(\overline{27}, \overline{3}\right)}$$

SM gauge bosons ?

➔ Vector

Quarks & leptons ?

➔ Spinor

3世代 ?

➔「超対称性」&「余剰次元」

【期待】

「超対称性」を用いて，ローレンツ変換性（スピン）が異なる粒子多重項として統合される！

「余剰次元」としてオービフォールドを用いて，ミラー粒子を含む余分な粒子を消去できるかも！

・超対称性 & 余剰次元

E_8 pure super YM theory on $M^4 \times (T^2/Z_3)$

K. S. Babu, S. M. Barr and B. Kyae, "Family unification in five and six dimensions" *Phys. Rev.* D65 (2002), 115008.

6D ベクトル多重項 V^{6D}

↓

4D ベクトル多重項 V^{4D}

4D ハイパー多重項 Σ

T^2上の120度回転 $\Rightarrow \left(T^2 / Z_3 \right)$

$z \to \omega z,$

$z = x^5 + ix^6$

$\omega = e^{\frac{2\pi}{3}i}$

連動させて，対称性を壊す。

➔ Orbifold breaking

$$\Phi^{\alpha}\left(x, \omega z, \omega^2 \bar{z}\right) = \omega^k \Phi^{\alpha}\left(x, z, \bar{z}\right)$$

$k = 0$ **において，質量ゼロの4次元場が現れる！**

T^2上の120度回転 $\Rightarrow \left(T^2 \big/ Z_3 \right)$

$z \rightarrow \omega z,$

$z = x^5 + i x^6$

$\omega = e^{\frac{2\pi}{3} i}$

連動して,

$$V^{4D} = V_{(78,1)} + V_{(1,8)} + V_{(27,3)} + V_{(\overline{27},\bar{3})}$$

Z_3	1	1	ω	ω^2

$$\Sigma = \Sigma_{(78,1)} + \Sigma_{(1,8)} + \Sigma_{(27,3)} + \Sigma_{(\overline{27},\bar{3})}$$

Z_3	ω^2	ω^2	1	ω

T^2上の120度回転 $\Rightarrow \left(T^2 \big/ Z_3 \right)$

$z \to \omega z,$

$z = x^5 + ix^6$

$\omega = e^{\frac{2\pi}{3}i}$

連動して,

$$V^{4D} = V_{(78,1)} + V_{(1,8)} + V_{(27,3)} + V_{(\overline{27},\overline{3})}$$

Z_3	1	1	ω	ω^2

$$\left[T^{(27,3)}, T^{(27,3)} \right] \Rightarrow T^{(\overline{27},\overline{3})}$$

$$\left[T^{(\overline{27},\overline{3})}, T^{(\overline{27},\overline{3})} \right] \Rightarrow T^{(27,3)}$$

$$\omega\omega \Rightarrow \omega^2$$

$$\omega^2\omega^2 \Rightarrow \omega$$

$$T^2\text{上の120度回転} \Rightarrow \left(T^2 \big/ Z_3\right)$$

$$z \to \omega z,$$

$$z = x^5 + i x^6$$

$$\omega = e^{\frac{2\pi}{3} i}$$

連動して,

$$V^{4D} = V_{(78,1)} + V_{(1,8)} + V_{(27,3)} + V_{(\overline{27},\bar{3})} \qquad A_\mu$$

Z_3	1	1	ω	ω^2

$$\Sigma = \Sigma_{(78,1)} + \Sigma_{(1,8)} + \Sigma_{(27,3)} + \Sigma_{(\overline{27},\bar{3})} \qquad A_z$$

Z_3	ω^2	ω^2	1	ω

$$\partial_z \to \omega^2 \partial_z$$

T^2上の120度回転 $\Rightarrow \left(T^2 / Z_3 \right)$

$z \to \omega z,$

$z = x^5 + ix^6$

$\omega = e^{\frac{2\pi}{3} i}$

連動して,

SM gauge bosons

$$V^{4D} = \boxed{V_{(78,1)}} + V_{(1,8)} + V_{(27,3)} + V_{(\overline{27},\bar{3})}$$

Z_3	1	1	ω	ω^2

Quarks & leptons

$$\Sigma = \Sigma_{(78,1)} + \Sigma_{(1,8)} + \boxed{\Sigma_{(27,3)}} + \Sigma_{(\overline{27},\bar{3})}$$

Z_3	ω^2	ω^2	1	ω

現在，挑んでいること（with Y. Goto さん）

溝口さんの示唆による。

以上

ゲージ粒子と3世代の物質粒子の統合?

$$\boxed{E_8 \supset SU(9)}$$

$$\boxed{248 = \underbrace{80}_{\text{SM gauge bosons ?}} + \underbrace{84 + \overline{84}}_{\text{3 families of quarks \& leptons ?}}}$$

SM gauge bosons ?

3 families of quarks & leptons ?

ご清聴ありがとうございました。