

最小シーソー模型の構築に向けて

清水勇介

広島大学

2017年11月1日



Flavor Physics Workshop 2017

@神奈川県三浦市 三浦マホロバ温泉

共同研究者：高木 堅太（広島大学），谷本盛光（新潟大学），[arXiv:1709.02136](https://arxiv.org/abs/1709.02136)

概要

- 1 導入
- 2 最小シーソー模型
 - 2-3 混合の回転（順階層性）
 - 数値解析
- 3 まとめ

1. 導入

素粒子標準模型 : $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$

素粒子	第一世代	第二世代	第三世代	混合行列
クォーク	$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L$ u_R^c d_R^c	$\begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_L$ c_R^c s_R^c	$\begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_L$ t_R^c b_R^c	CKM 行列 (カビボ・小林・益川)
レプトン	$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L$ e_R^c	$\begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_L$ μ_R^c	$\begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}_L$ τ_R^c	MNS 行列 (牧・中川・坂田)

世代問題

- 素粒子の質量は世代ごとに大きな違いがある。
- 素粒子の世代混合はクォークとレプトンで大きく違う。

ニュートリノ振動とレプトンの世代混合

- ニュートリノのフレーバー、質量固有状態と時間発展

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_i U_{\alpha j} |\nu_i\rangle, \quad |\nu_\alpha(t)\rangle = \sum_i U_{\alpha j} |\nu_i\rangle e^{-iE_i t}$$

- 2世代の場合を考える (世代混合角 θ)

$$|\nu_e(t)\rangle = \cos\theta |\nu_1\rangle e^{-iE_1 t} + \sin\theta |\nu_2\rangle e^{-iE_2 t}$$

$$|\nu_\mu(t)\rangle = -\sin\theta |\nu_1\rangle e^{-iE_1 t} + \cos\theta |\nu_2\rangle e^{-iE_2 t}$$

- $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$ の遷移確率

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; t) = |\langle \nu_\mu(t) | \nu_e(t) \rangle|^2 = \sin^2 2\theta \sin^2 \frac{E_2 - E_1}{2} t$$

$$\simeq \sin^2 2\theta \sin^2 \frac{\Delta m^2 L}{4E}, \quad \Delta m^2 = m_2^2 - m_1^2,$$

$$E_i = \sqrt{p^2 + m_i^2} \simeq p + \frac{m_i^2}{2E}$$

ニュートリノ振動

- ニュートリノの質量階層性：
 順階層型 $\rightarrow m_1 < m_2 < m_3$
 逆階層型 $\rightarrow m_3 < m_1 < m_2$
 縮退型 $\rightarrow m_1 \sim m_2 \sim m_3$



- レプトンの混合行列：
 $|\nu_\alpha\rangle = U_{\alpha i} |\nu_i\rangle \quad (\alpha = e, \mu, \tau, \quad i = 1, 2, 3)$

$$\begin{aligned}
 U &\equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta_{13}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{i\delta_{13}} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\rho} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\sigma} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta_{13}} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\rho} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\sigma} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

実験値は大きな θ_{13} を示唆 !!

- Daya Bay 実験の結果 @Neutrino 2012

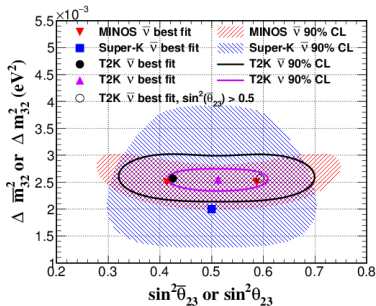
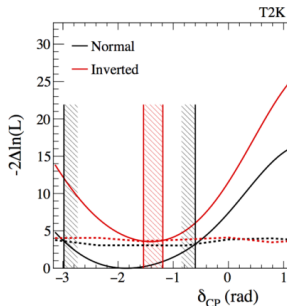
$$\sin^2 2\theta_{13} = 0.089 \pm 0.010 \text{ (stat)} \pm 0.005 \text{ (syst)}.$$

- RENO, Double Chooz, T2K 実験と無矛盾
- ニュートリノ振動実験の3世代解析:

I. Esteban, M. C. Gonzalez-Garcia, M. Maltoni, I. Martinez-Soler and T. Schwetz, JHEP **1701** (2017) 087.

パラメータ	中心値	1σ	3σ
$\sin^2 \theta_{12}$	0.306	0.294-0.318	0.271-0.345
$\sin^2 \theta_{23}$	0.441 0.587	0.420-0.468 0.563-0.607	0.385-0.635 0.393-0.640
$\sin^2 \theta_{13}$	0.0217 0.0218	0.0209-0.0224 0.0210-0.0226	0.0193-0.0239 0.0195-0.0241
$\Delta m_{\text{sol}}^2 [10^{-5} \text{eV}^2]$	7.50	7.33-7.69	7.03-8.09
$ \Delta m_{\text{atm}}^2 [10^{-3} \text{eV}^2]$	2.52 2.51	2.48-2.56 2.56-2.48	2.41-2.64 2.40-2.64

- T2K 実験が CP の破れを報告 :



$\delta_{CP} \simeq -\pi/2$ ($3\pi/2$), 順階層性,

@ 2σ C.L., KEK colloquium, 2017 年 8 月 4 日

- 大気ニュートリノの混合角 : $\theta_{23} \simeq \pi/4$

- 原子炉実験で θ_{13} ($|U_{e3}| \equiv \sin \theta_{13}$) の大きさが報告される前までは、tri-bimaximal(TBM) 混合の考え方が成功していた。

$$U_{\text{PMNS}} = V_{\text{TBM}} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

$$|U_{e2}| = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad |U_{e3}| = 0, \quad |U_{\mu 3}| = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

P.F. Harrison, D. H. Perkins, W. G. Scott, Phys. Lett. B 530 167 (2002)

- TM_1 : 2-3 混合の回転

$$U_{\text{PMNS}} = V_{\text{TBM}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix},$$

$$|U_{e2}| = \left| \frac{\cos \alpha}{\sqrt{3}} \right|, \quad |U_{e3}| = \left| \frac{\sin \alpha}{\sqrt{3}} \right|, \quad |U_{\mu 3}| = \left| \frac{\cos \alpha}{\sqrt{2}} + \frac{\sin \alpha}{\sqrt{3}} \right|.$$

$\sin^2 \theta_{12} < \frac{1}{3}$ となり、実験を再現できる。

- TM_2 : 1-3 混合の回転

$$U_{PMNS} = V_{TBM} \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix},$$

$$|U_{e2}| = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad |U_{e3}| = \left| \frac{2 \sin \alpha}{\sqrt{6}} \right|, \quad |U_{\mu 3}| = \left| -\frac{\sin \alpha}{\sqrt{6}} + \frac{\cos \alpha}{\sqrt{2}} \right|.$$

$\sin^2 \theta_{12} > \frac{1}{3}$ となり、中心値から離れる。

- TM_3 : 1-2 の回転

$$U_{PMNS} = V_{TBM} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$|U_{e2}| = \left| \frac{2 \sin \alpha}{\sqrt{6}} + \frac{\cos \alpha}{\sqrt{3}} \right|, \quad |U_{e3}| = 0, \quad |U_{\mu 3}| = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$|U_{e3}| = 0$ となってしまう実験と矛盾する。

2. 最小シーソー模型

- ニュートリノ振動実験を再現する最小数のパラメータとなる質量行列 (texture) を考える。
- 荷電レプトンの質量行列は対角的と仮定。
- 2つの右巻きマヨラナニュートリノを導入。
- 右巻きマヨラナニュートリノの質量行列：

$$M_R = M_0 \begin{pmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- デイラックニュートリノの質量行列：

$$M_D = \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}$$

- 左巻きマヨラナニュートリノの質量行列：

$$M_\nu = -M_D M_R^{-1} M_D^T = -\frac{1}{M_0} \begin{pmatrix} a^2 p + d^2 & abp + de & acp + df \\ abp + de & b^2 p + e^2 & bcp + ef \\ acp + df & bcp + ef & c^2 p + f^2 \end{pmatrix}$$

- Tri-bimaximal 混合行列：

$$V_{\text{TBM}} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

- TBM 混合行列で回転させる：

$$\hat{M}_\nu \equiv V_{\text{TBM}}^T M_\nu V_{\text{TBM}} = -\frac{1}{M_0} \begin{pmatrix} \frac{A_\nu^2 p + D_\nu^2}{6} & \frac{A_\nu B_\nu p + D_\nu E_\nu}{3\sqrt{2}} & \frac{A_\nu C_\nu p + D_\nu F_\nu}{2\sqrt{3}} \\ \frac{A_\nu B_\nu p + D_\nu E_\nu}{3\sqrt{2}} & \frac{B_\nu^2 p + E_\nu^2}{3} & \frac{B_\nu C_\nu p + E_\nu F_\nu}{\sqrt{6}} \\ \frac{A_\nu C_\nu p + D_\nu F_\nu}{2\sqrt{3}} & \frac{B_\nu C_\nu p + E_\nu F_\nu}{\sqrt{6}} & \frac{C_\nu^2 p + F_\nu^2}{2} \end{pmatrix}$$

$$A_\nu \equiv 2a - b - c, \quad B_\nu \equiv a + b + c, \quad C_\nu \equiv c - b,$$

$$D_\nu \equiv 2d - e - f, \quad E_\nu \equiv d + e + f, \quad F_\nu \equiv f - e$$

2-3 混合の回転 (順階層性)

- TBM 混合行列から 2-3 混合の回転を考える (順階層性)。質量行列の $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(1, 3)$, $(3, 1)$ 成分がゼロとなる条件:

$$A_\nu = 2a - b - c = 0, \quad D_\nu = 2d - e - f = 0,$$

- ニュートリノの質量行列:

$$\hat{M}_\nu = \frac{1}{M_0} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4}((b+c)^2 p + (e+f)^2) & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}((c^2 - b^2)p - e^2 + f^2) \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}((c^2 - b^2)p - e^2 + f^2) & \frac{1}{2}((b-c)^2 p + (e-f)^2) \end{pmatrix}.$$

- 一番軽いニュートリノの質量 m_1 はゼロ。

- 右巻きマヨラナニュートリノとディラックニュートリノの質量の再定義 ($p = 1$):

$$M_R = M_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_D = \begin{pmatrix} \frac{b+c}{2} & \frac{e+f}{2} \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}.$$

- 質量行列 \hat{M}_ν :

$$\hat{M}_\nu = \frac{f^2}{M_0} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} [B^2 e^{2i\phi_B} (1+j)^2 + (k+1)^2] & \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} [B^2 e^{2i\phi_B} (1-j^2) - k^2 + 1] \\ 0 & \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} [B^2 e^{2i\phi_B} (1-j^2) - k^2 + 1] & \frac{1}{2} [B^2 e^{2i\phi_B} (1-j)^2 + (k-1)^2] \end{pmatrix}.$$

- 左巻きレプトンの位相の再定義により、 e と f は実数で b と c は複素数:

$$k = \frac{e}{f}, \quad j = \frac{b}{c}, \quad \frac{c}{f} = B e^{i\phi_B}$$

- ニュートリノの質量行列 \hat{M}_ν を対角化する行列:

$$V_{23} = \frac{1}{\mathcal{A}} \begin{pmatrix} \mathcal{A} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \mathcal{V} \\ 0 & -\mathcal{V}^* & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A} = \sqrt{1 + |\mathcal{V}|^2}$$

\mathcal{V} は k, j, B, ϕ_B で書かれる。

- PMNS 行列:

$$U_{\text{PMNS}} = V_{\text{TBM}} V_{23}$$

- ニュートリノの質量固有値:

$$m_1 = 0, \quad m_2^2 m_3^2 = \frac{9}{4} (j - k)^4 B^4 f^8,$$

$$m_2^2 + m_3^2$$

$$= \frac{f^4}{16} [B^4 (5j^2 + 2j + 5)^2 + 2B^2 (5jk + j + k + 5)^2 \cos 2\phi_B + (5k^2 + 2k + 5)^2]$$

- PMNS 行列とニュートリノの質量は関係している。

- 可能なパターン：

$$(I) \ b + c = 0, \quad (II) \ c = 0, \quad (III) \ b = 0$$

- ディラックニュートリノの質量行列：

$$M_D = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & \frac{e+f}{2} \\ b & e \\ -b & f \end{pmatrix} & (I) \ b + c = 0 \\ \begin{pmatrix} \frac{b}{2} & \frac{e+f}{2} \\ b & e \\ 0 & f \end{pmatrix} & (II) \ c = 0 \\ \begin{pmatrix} \frac{c}{2} & \frac{e+f}{2} \\ 0 & e \\ c & f \end{pmatrix} & (III) \ b = 0 \end{cases}$$

- (I): ニュートリノの質量行列

$$\hat{M}_\nu = \frac{f^2}{M_0} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4}(k+1)^2 & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}(k^2-1) \\ 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}(k^2-1) & 2B^2 e^{2i\phi_B} + \frac{1}{2}(k-1)^2 \end{pmatrix}$$

$$(j = b/c = -1)$$

$$M_D = \begin{pmatrix} 0 & \frac{e+f}{2} \\ b & e \\ -b & f \end{pmatrix}$$

- King 氏の "Littlest seesaw model" :

S. F. King, JHEP 1602 (2016) 085, P. Ballett, et. al, JHEP 1703 (2017) 110.

$$M_D = \begin{pmatrix} 0 & f \\ b & 3f \\ -b & -f \end{pmatrix}$$

数値解析

- PMNS 行列要素 $U_{\alpha i}$:

$$s_{12}^2 \equiv \sin^2 \theta_{12} = \frac{|U_{e2}|^2}{1 - |U_{e3}|^2}, \quad s_{23}^2 \equiv \sin^2 \theta_{23} = \frac{|U_{\mu 3}|^2}{1 - |U_{e3}|^2},$$
$$s_{13}^2 \equiv \sin^2 \theta_{13} = |U_{e3}|^2$$

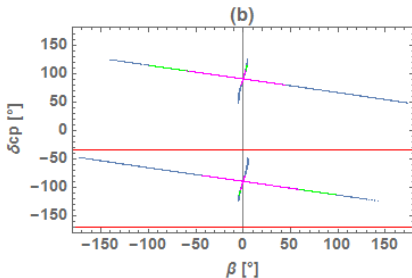
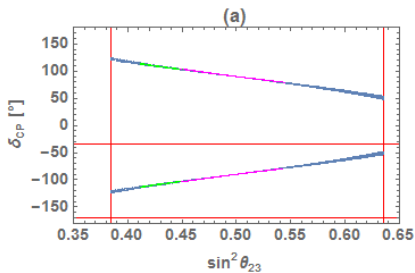
- ディラック CP 位相 δ_{CP} は Jarlskog 不変量から計算可能:

$$\sin \delta_{CP} = \frac{J_{CP}}{s_{23} c_{23} s_{12} c_{12} s_{13} c_{13}^2}, \quad J_{CP} = \text{Im} [U_{e1} U_{\mu 2} U_{\mu 1}^* U_{e2}^*],$$

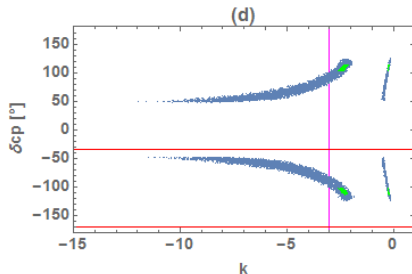
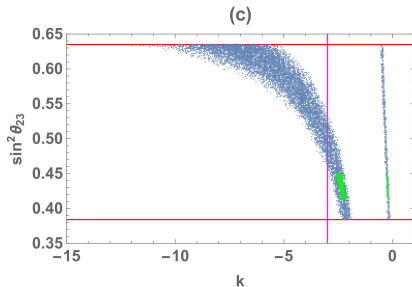
$\cos \delta_{CP}$ は $|U_{\mu 1}|^2 = 1/6$ から決まる。

- 青 : 模型の予言 (3σ)、緑 : 模型の予言 (1σ)、赤 : 実験の 3σ (global analysis, 1σ (T2K))、紫 : "Littelest seesaw model" の予言

(a) $\sin^2 \theta_{23} - \delta_{CP}$, (b) $\beta - \delta_{CP}$



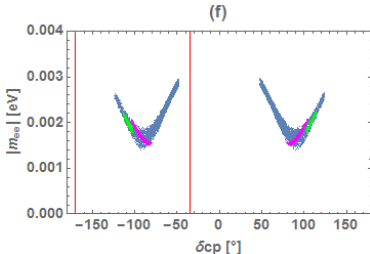
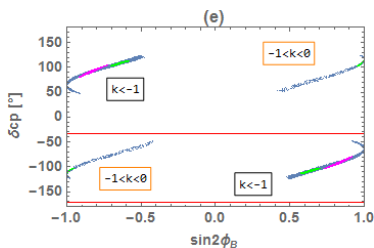
- 青 : 模型の予言 (3σ)、緑 : 模型の予言 (1σ)、赤 : 実験の 3σ (global analysis), 1σ (T2K)、紫 ($k = e/f = -3$): "Littelest seesaw model" の予言
(c) $k - \sin^2 \theta_{23}$, (d) $k - \delta_{CP}$



- $0\nu\beta\beta$ 崩壊の有効質量:

$$\begin{aligned} |m_{ee}| &= |m_1 U_{e1}^2 + m_2 U_{e2}^2 + m_3 U_{e3}^2| \\ &= |m_1 c_{13}^2 c_{12}^2 e^{i\alpha} + m_2 c_{13}^2 s_{12}^2 e^{i\beta} + m_3 s_{13}^2 e^{-2i\delta_{CP}}| \\ &= |m_2 c_{13}^2 s_{12}^2 e^{i\beta} + m_3 s_{13}^2 e^{-2i\delta_{CP}}|. \end{aligned}$$

- マヨラナ位相 β は有効質量 $|m_{ee}|$ と関連している。
 - 青: 模型の予言 (3σ)、緑: 模型の予言 (1σ)、赤: 実験の 1σ (T2K)、紫 ($k = e/f = -3$): "Littlest seesaw model" の予言
- (e) $\sin 2\phi_B - \delta_{CP}$, (f) $\delta_{CP} - |m_{ee}|$



3. まとめ

- 最近の原子炉実験で θ_{13} が大きいことが判明した。
- ニュートリノ振動実験を再現する最小シーソー模型を構築した。
- この模型ではディラック CP 位相が $\delta_{CP} \sim \pm\pi/2$ を予言する。
- 模型構築にとって大きなモチベーションになると期待する。

ニュートリノ実験の状況

大気ニュートリノ

L/E analysis: SK-I + SK-II + SK-III

S.Yamada, MORIOND EW2010

Zenith Physical Region (1σ)

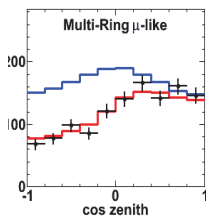
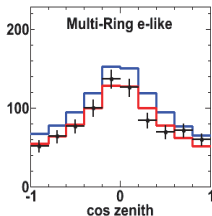
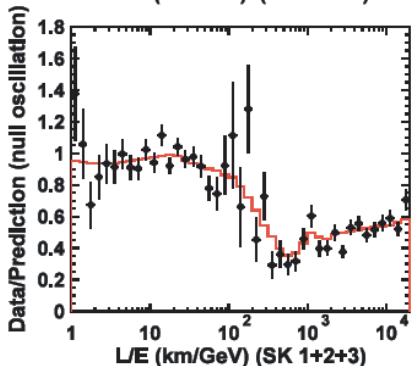
$$\Delta m_{23}^2 = 2.11_{-0.19}^{+0.11} \times 10^{-3}$$

$$\sin^2 2\theta_{23} > 0.96 \text{ (90\% C.L.)}$$

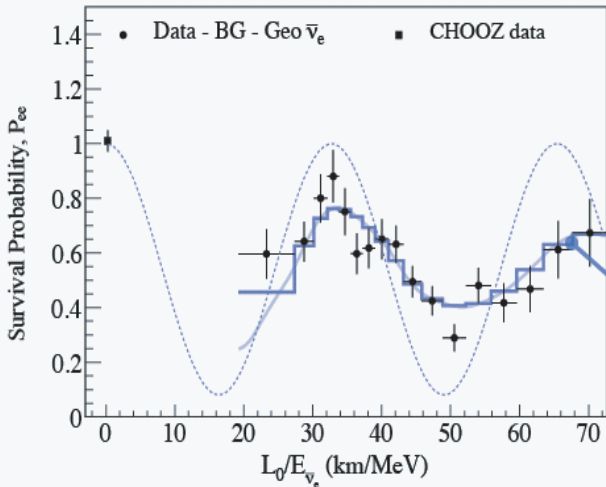
L/E Physical Region (1σ)

$$\Delta m_{23}^2 = 2.19_{-0.13}^{+0.14} \times 10^{-3}$$

$$\sin^2 2\theta_{23} > 0.96 \text{ (90\% C.L.)}$$



KamLAND



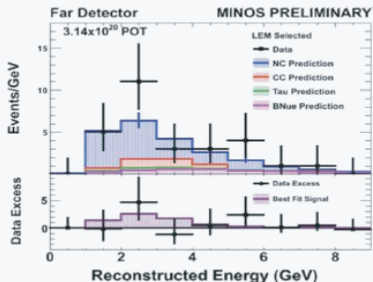
Best-fit oscillation
accounting for energy
spectrum and
reactor distribution

MINOS



- Fermilab-Soudan, 735 km
- 5.4 kton far detector, 1 kton near
- 2.54 cm thick steel plates ($1.4X_0$)
- 1.2 T solenoidal magnetic field

MINOS First ν_e Appearance Search



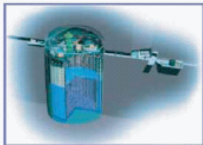
Observed: 35 events

Expected background: $27 \pm 5(\text{stat}) \pm 2(\text{sys})$

1.5 σ excess

最初のニュートリノは2010年2月24日に観測された

T2K



Super-Kamiokande
(ICRR, Univ. Tokyo)



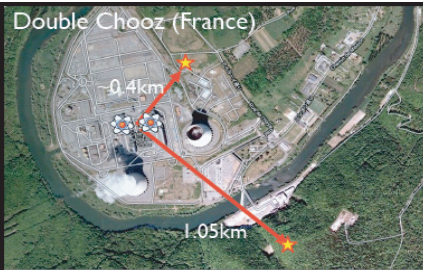
J-PARC Main Ring
(KEK-JAEA, Tokai)



2.5 degrees off-axis from J-PARC beam
295 km baseline
E \sim 0.75 GeV narrow band

22.5 kton Super-Kamiokande far detector; hybrid magnetized near detector at 280m

Double Chooz (France)



Daya Bay (China)



Yellow Sea

Near Detector

Factories

RENO (South Korea)



- $\sin \theta_{13}$ はカビボ角程度:

$$\sin \theta_{13} = 0.15 \pm 0.01, \quad \sin \theta_C = 0.225 \equiv \lambda.$$

- 質量と世代混合の関係:

$$\sqrt{\frac{m_d}{m_s}} \simeq 0.225 \simeq \sin \theta_C.$$

- ニュートリノ質量と世代混合は関係しているのでは !!

$$\sqrt[4]{\frac{\Delta m_{\text{sol}}^2}{\Delta m_{\text{atm}}^2}} = 0.416 \simeq \mathcal{O}(\sqrt{\lambda}) \Rightarrow \sin^2 \theta_{23}$$

目的

- ニュートリノ振動実験を再現する texture の構築

- Zero texture ($\sin \theta_C = \sqrt{m_d/m_s}$): 2 パラメータ
S. Weinberg, HUTP-77-A057, Trans.New York Acad.Sci.38:185-201, 1977

$$M_d = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{m_d m_s} \\ \sqrt{m_d m_s} & m_s \end{pmatrix}$$

- 3 世代に拡張 : 3 パラメータ
H. Fritzsch, Phys. Lett. B73 (1978) 317; Nucl. Phys. B115 (1979) 189

$$M_d = \begin{pmatrix} 0 & A_d & 0 \\ A_d & 0 & B_d \\ 0 & B_d & C_d \end{pmatrix}, \quad M_u = \begin{pmatrix} 0 & A_u & 0 \\ A_u & 0 & B_u \\ 0 & B_u & C_u \end{pmatrix},$$

$$V_{us} \simeq \sqrt{\frac{m_d}{m_s}} - \sqrt{\frac{m_u}{m_c}} \simeq 0.185, \quad V_{cb} \simeq \sqrt{\frac{m_s}{m_b}} - \sqrt{\frac{m_c}{m_t}} \simeq 0.065$$

- Fritzsch texture はクォークセクターでは上手く行かない。

レプトンセクター

M. Fukugita, M. Tanimoto, T. Yanagida, Prog. Theor. Phys. 89 (1993) 263.

- 荷電レプトンとディラックニュートリノの質量行列：

$$m_E = \begin{pmatrix} 0 & A_\ell & 0 \\ A_\ell & 0 & B_\ell \\ 0 & B_\ell & C_\ell \end{pmatrix}, \quad m_{\nu D} = \begin{pmatrix} 0 & A_\nu & 0 \\ A_\nu & 0 & B_\nu \\ 0 & B_\nu & C_\nu \end{pmatrix}.$$

- 右巻きマヨラナニュートリノの質量行列は単位行列に比例すると仮定： $M_R = M_0 \mathbf{1}$
- 左巻きマヨラナニュートリノの質量固有値：シーソー機構

$$m_i = (U_\nu^T m_{\nu D}^T M_R^{-1} m_{\nu D} U_\nu)_i.$$

- Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata (PMNS) 行列：

$$U_{\text{PMNS}} = U_\ell^\dagger Q U_\nu, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\tau} \end{pmatrix}.$$

レプトンの混合行列

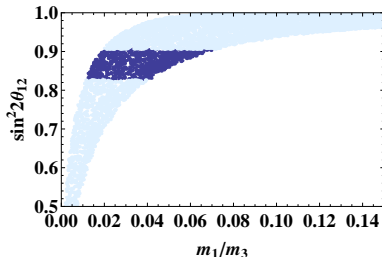
M. Fukugita, Y. S., M. Tanimoto and T. T. Yanagida, Phys. Lett. B **716** (2012) 294.

- フリーパラメータ : m_1, σ, τ

$$U_{e2} \simeq -\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^{1/4} + \left(\frac{m_e}{m_\mu}\right)^{1/2} e^{i\sigma},$$

$$U_{\mu 3} \simeq \left(\frac{m_2}{m_3}\right)^{1/4} e^{i\sigma} - \left(\frac{m_\mu}{m_\tau}\right)^{1/2} e^{i\tau},$$

$$U_{e3} \simeq \left(\frac{m_e}{m_\mu}\right)^{1/2} U_{\mu 3} + \left(\frac{m_2}{m_3}\right)^{1/2} \left(\frac{m_1}{m_3}\right)^{1/4}.$$



- 荷電レプトンからの寄与 :

$$\left(\frac{m_e}{m_\mu}\right)^{1/2} \simeq 0.0695,$$

$$\left(\frac{m_\mu}{m_\tau}\right)^{1/2} \simeq 0.244.$$

$$\sin^2 \theta_{23} \simeq \sqrt[4]{\frac{\Delta m_{\text{sol}}^2}{\Delta m_{\text{atm}}^2}} = 0.416 \simeq \mathcal{O}(\sqrt{\lambda}),$$

$$\sin \theta_{13} \simeq (\sin \theta_{23})^3 \sin \theta_{12} \simeq 0.158.$$

- ニュートリノの質量階層性は順階層。

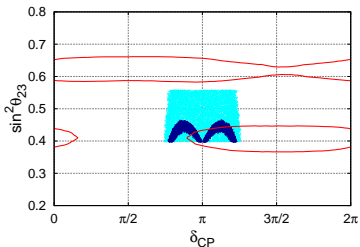
レプトンセクターの CP の破れ

M. Fukugita, Y. Kaneta, Y. S., M. Tanimoto and T. T. Yanagida, Phys. Lett. B764 (2017) 163

● レプトンセクターの Jarlskog 不変量

$$\begin{aligned} J_{CP} &= \text{Im} [U_{e1} U_{\mu 2} U_{e2}^* U_{\mu 1}^*] \\ &= \sin \theta_{23} \cos \theta_{23} \sin \theta_{12} \cos \theta_{12} \sin \theta_{13} \cos^2 \theta_{13} \sin \delta_{CP}, \\ 0.40 &\lesssim \sin^2 \theta_{23} \lesssim 0.47, \\ 0.77\pi &\lesssim \delta_{CP} \lesssim \pi, \pi \lesssim \delta_{CP} \lesssim 1.24\pi \end{aligned}$$

(赤線は $\text{NO}\nu\text{A}$ の 1σ の結果)



Vacuum alignment of flavons in S_4 group

- 3×2 Dirac neutrino mass matrix is given by introducing flavons with VEV alignment in the framework of the non-abelian discrete symmetry S_4 .
- S_4 can be defined as the group generated by three elements S , T , and U which satisfy the algebraic relations as
$$S^2 = T^3 = U^2 = (ST)^3 = (SU)^2 = (TU)^2 = (STU)^4 = e.$$
- These generators are represented on $\mathbf{1}$, $\mathbf{1}'$, $\mathbf{2}$, $\mathbf{3}$, and $\mathbf{3}'$ of S_4 :

$$\mathbf{1}, \mathbf{1}' : S = 1, \quad T = 1, \quad U = \pm 1,$$

$$\mathbf{2} : S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^2 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{3}, \mathbf{3}' : S = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega \end{pmatrix}, \quad U = \mp \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Tensor products:

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \rightarrow \mathbf{1}, \quad \mathbf{3}' \otimes \mathbf{3}' \rightarrow \mathbf{1}, \quad \mathbf{3} \otimes \mathbf{3}' \rightarrow \mathbf{1}',$$

- Clebsch-Gordan coefficient:

$$\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_3 + \alpha_3 \beta_2 ,$$

where α_i and β_i are elements of $\mathbf{3}^{(')}$.

- 3×2 Dirac neutrino mass matrix is given by introducing flavons with VEV alignment in the framework of the non-abelian discrete symmetry S_4 :

$$\langle \phi \rangle = \begin{pmatrix} \frac{b+c}{2} \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

- This VEV is preserved by the SU (US) symmetry:

$$SU (US) = \mp \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

for $\mathbf{3}$ and $\mathbf{3}'$, respectively, while this is broken by T and U .

- This flavon has the residual Z_2 symmetry $\{1, SU\}$ after S_4 is broken.

Let us reproduce the Dirac mass matrix by introducing those flavons. Suppose that the left-handed lepton L , ϕ_{atm} , and ϕ_{sol} are $\mathbf{3}'$ of S_4 , while the right-handed neutrinos ν_{R1} and ν_{R2} are $\mathbf{1}$ of S_4 . The Higgs fields H_u is also $\mathbf{1}$. For the 2-3 family mixing in NH, the Dirac mass matrix is reproduced by the Yukawa couplings

$$\frac{y_{\text{atm}}}{\Lambda} \phi_{\text{atm}} L H_u \nu_{R1}^c + \frac{y_{\text{sol}}}{\Lambda} \phi_{\text{sol}} L H_u \nu_{R2}^c,$$

where y_{atm} and y_{sol} are arbitrary coupling constants, Λ is the cut-off scale of the S_4 symmetry.

The VEV's of ϕ_{atm} and ϕ_{sol} are

$$\langle \phi_{\text{atm}} \rangle \sim \begin{pmatrix} \frac{b+c}{2} \\ c \\ b \end{pmatrix}, \quad \langle \phi_{\text{sol}} \rangle \sim \begin{pmatrix} \frac{e+f}{2} \\ f \\ e \end{pmatrix},$$

since the S_4 singlet contraction $\mathbf{3}' \otimes \mathbf{3}'$ implies $L\phi = L_1\phi_1 + L_2\phi_3 + L_3\phi_2$.

The 2×2 diagonal right-handed Majorana mass matrix is reproduced by help of the auxiliary Z_2 symmetry in NH.