

Lattice QCD

KEK, 総研大

金児 隆志

Flavor Frontier 2026 @ 岩手大学

2026年9月2日

約40年の進歩

初期のシミュレーション '81

Creutz-Jacobs-Rebi, Creutz, Wilson, Weingarten, Hamber-Parisi, ...

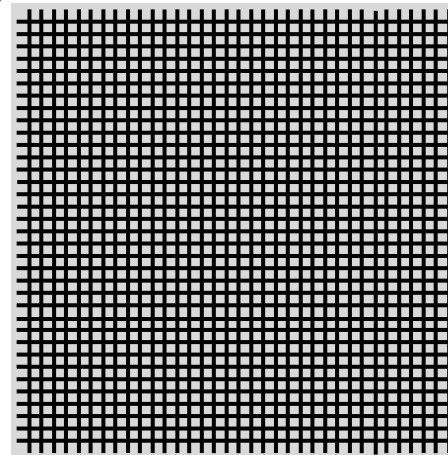
最近のシミュレーション

ALPHA, ETM, Fermilab, HPQCD, JLQCD, PACS, RBC, UKQCD, ...

DEC VAX 11 (1MFLOPS)

井

- 0.8 fm box
- 2 GeV cutoff
- クォークのダイナミクス無視
- ...



- 10倍以上の体積
- 2倍以上の cutoff
- 動的なクォーク
- ...

RIKEN Fugaku (0.5EFLOPS = 5×10^{11} MFLOPS)



- QCDの定量的予言
- K 中間子、核子の物理の定量的計算
 - 有限温度・有限密度QCD
 - ...

- 低エネルギーでのQCDの検証
- 閉じ込めポテンシャルの計算
 - ハドロン質量の再現
 - ゲージ理論の有限温度相転移

計算機性能、定式化・計算手法の改善で大きく進歩。勿論、まだ挑戦もある。

Bの物理への挑戦 I

多スケール問題

$$L^{-1} < M_{\pi}(m_{ud}) < M_K(m_s) < M_D(m_c) < M_B(m_b) < a^{-1}$$

+ 軽く大きい π 中間子 $\Rightarrow$ 大きい格子サイズ $L > M_{\pi}^{-1}$

+ 重くて小さい b quark $\Rightarrow$ 小さい格子間隔 $a < m_b^{-1} (M_B^{-1})$

$L/a \gg M_B/M_{\pi} \Rightarrow$ 非常に高い解像度 $L/a \sim O(100)$ が必要

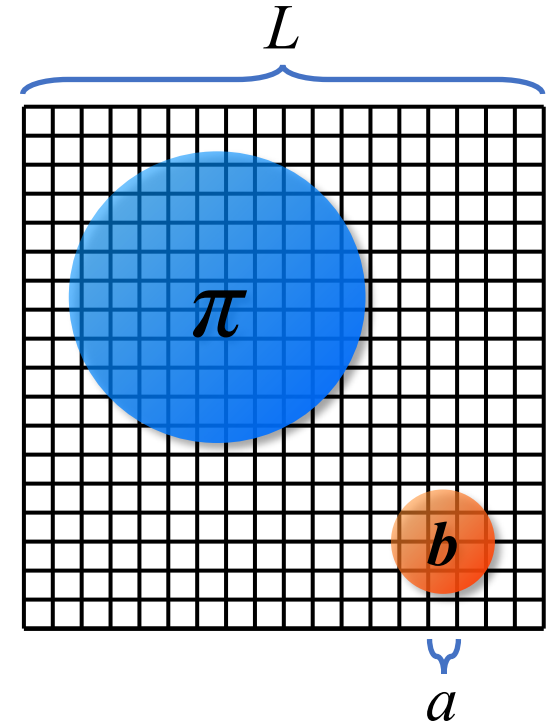
$\Rightarrow$ 演算量 $\propto (L/a)^7 L^2$ が膨大に $\sim O(10)$ EFLOPS x 5年

これまでのシミュレーションは $a^{-1} \lesssim m_b$ に制限 $\Rightarrow$ 大きい $O((am_b)^n)$ 誤差を避けるため…

- b quarkに QCD 作用 と現実より小さい m_b (“relativistic”) $\Leftrightarrow m_b$ についての外挿
- 有効理論に基づいた作用と現実の m_b (“有効理論ベース”) $\Leftrightarrow$ QCDとの(摂動)matchingの誤差

[K の物理: factor $(M_K/M_B)^7$ で計算コストを削減 $\Rightarrow$ 既に理想的なシミュレーションを実施]

計算機性能とアルゴリズムの改良によって克服されつつある



Bの物理への挑戦 II

複数粒子状態 or 不安定粒子 $\Leftrightarrow$ Maiani-Testa no-go theorem '90

$$\langle \mathcal{O}_\pi(t', -\mathbf{p}) \mathcal{O}_\pi(t, \mathbf{p}) J(0, \mathbf{0}) \rangle \xrightarrow{t, t' \rightarrow \infty} \langle \pi(\mathbf{0}) \pi(\mathbf{0}) | J(\mathbf{q}) | 0 \rangle + \dots$$

有限体積のEuclid時空格子の相関関数

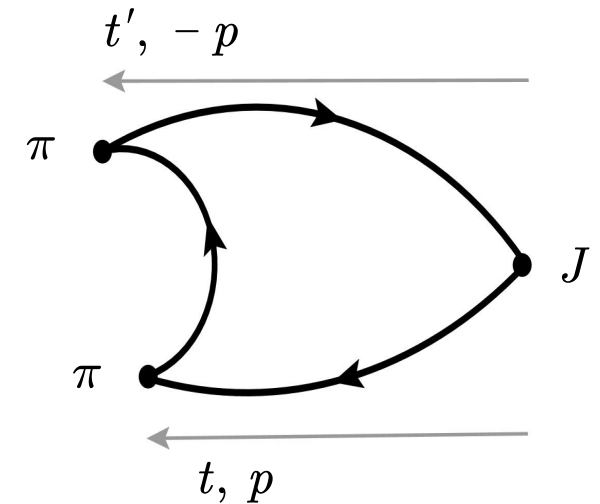
$\Rightarrow$ off-shellの寄与 + 欲しい行列要素 $\times$ 有限体積補正 $\times e^{-\Delta Et} + \dots$

① “gold-plated”: 始状態・終状態とも、QCDで安定なハドロンを1個以内

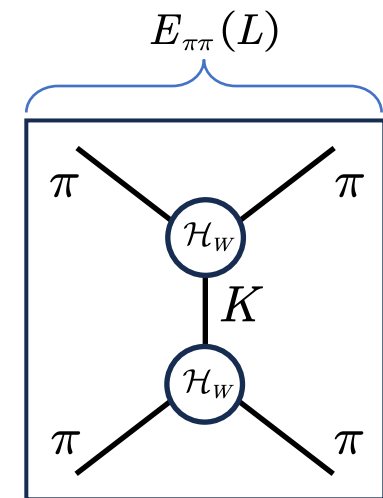
- 有限体積Euclid格子の相関関数 $\Rightarrow$ 欲しい行列要素
- $B \rightarrow \ell \nu$, $B \rightarrow \pi \ell \nu$, $B \rightarrow K \nu \nu$, ...

② non “gold-plated”: 始状態か終状態が2粒子以上 or 不安定粒子を含む

- 相関関数と行列要素を関係づけるframeworkが必要 (“Lellouch-Lüscher”)
- $K \rightarrow \pi \pi$, $B \rightarrow \rho \ell \nu$, $B \rightarrow K^* \ell \ell$, $B \rightarrow X_{\{c,u\}} \ell \nu$, ...



Lellouch-Lüscher '00



frameworkの開発により急速に応用が広がっている

Outline

主観的に選んだプロセスについて、lattice計算の現状と展望

- Introduction
- (radiative) leptonic $B_{(s,c)}$ decays
- exclusive semileptonic $B_{(s,c)}$ decays
- inclusive $\{D, B\}_s$ decays

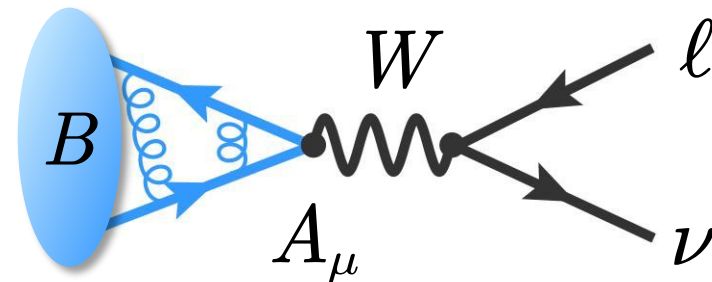
leptonic decays

レプトニック崩壊と崩壊定数

崩壊率

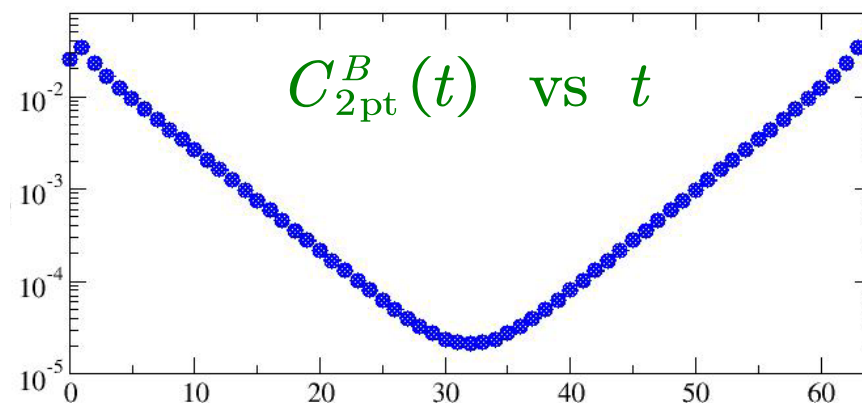
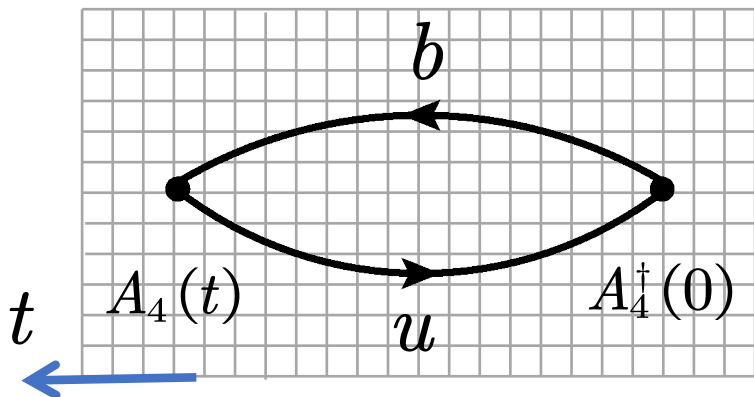
$$\Gamma(B \rightarrow \ell \nu) = |V_{ub}|^2 \frac{G_F^2}{8\pi} M_B m_\ell^2 \left(1 - \frac{m_\ell^2}{M_B^2}\right) f_B^2$$

- ハドロン行列要素 $\langle 0 | A_\mu | B(p) \rangle = p_\mu f_B$
- ヘリシティ抑制 $\Gamma \propto m_\ell^2$



格子QCDで計算するもの = 2点関数

$$C_{2pt}^B(t) = \langle A_4(t) A_4^\dagger(0) \rangle = \frac{1}{2M_B} |\langle 0 | A_4 | B(0) \rangle|^2 \exp[-M_B t] + O(e^{-\Delta M t})$$



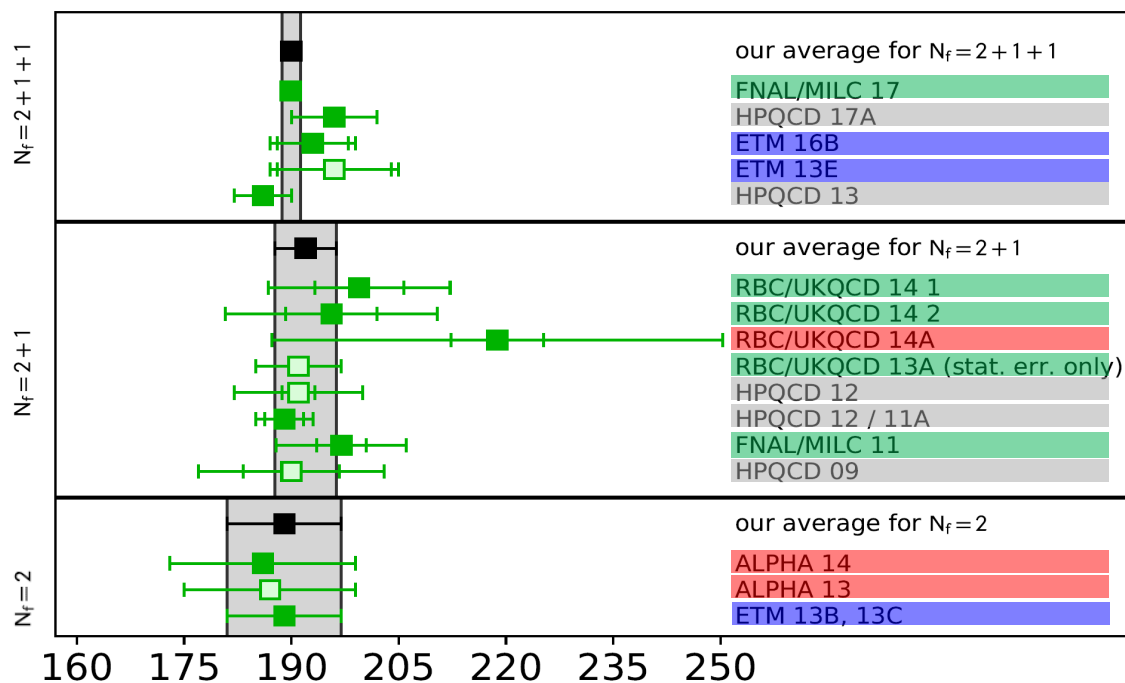
- t 依存性 $\Rightarrow M_B$
- 大きさ $\Rightarrow f_B$

周期境界条件: $\exp \rightarrow \cosh$

B中間子崩壊定数

FLAG '24

f_B [MeV]



relativistic

Fermilab, RHQ

HQET, static

NRQCD

異なる定式化を用いた多くの独立計算

$$\Delta f_B \sim 0.7\% \text{ in isoQCD}$$

benchmark quantity : 2点関数 $\Rightarrow f_K/f_{\pi'} f_{B(s)'} \dots$

isoQCD: CLQCD'26 $f_B=190(4)$

EM / strong isospin 補正?

Rome-SOTON '19 for $K \rightarrow \ell \nu + \ell \nu \gamma$

$$\Gamma_{\ell \nu + \ell \nu \gamma}$$

$$= [\Gamma_{\ell \nu}^{pt}(\mu_\gamma) + \Gamma_{\ell \nu \gamma}^{pt}(\mu_\gamma)]_{PT} + [\Gamma_{\ell \nu}(L) - \Gamma_{\ell \nu}^{pt}(L)]_{lat}$$

+ IR safeな項に分解

$$+ \delta_{EM+SU(2)}/2 = -0.63(7)\%$$

$$\Leftrightarrow \text{ChPT [Ciligrano+ '11]} \delta_{EM+SU(2)}/2 = -0.56(11)\%$$

$$+ \text{独立計算 [RBC/UKQCD '22]} -0.43(21)\%$$

B, D崩壊に応用可能... 今すぐ必要か?

$$+ |\mathbf{V}_{ub}| = 4.05(3)_{lat}(64)_{exp} \times 10^{-3} \Leftrightarrow \text{helicity suppression}$$

$$\Rightarrow \text{B2TiP '19 } \Delta |\mathbf{V}_{ub}|_{exp} \sim 3\% @ \text{Belle II } 50ab^{-1}$$

他のB中間子

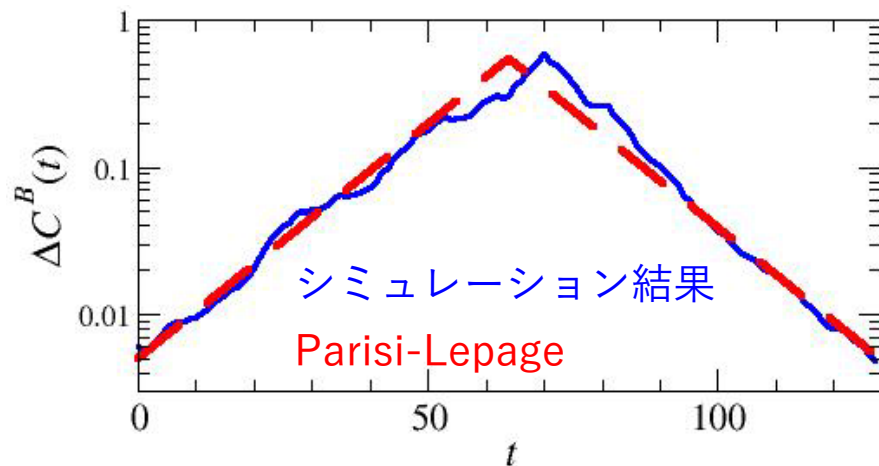
- Bより B_s , B_c の方が統計的に有利

Parisi '83, Lepage '89

+ $ud \rightarrow s, c$ quarks $\Rightarrow$ 統計ゆらぎを大きく削減

$$\frac{\Delta C_{2\text{pt}}^{\bar{Q}q}(t)}{C_{2\text{pt}}^{\bar{Q}q}(t)} \sim \exp[\alpha t], \quad \alpha_{\bar{Q}q} = M_{\bar{Q}q} - \frac{M_{\bar{Q}Q} + M_{\bar{q}q}}{2}$$

$$\alpha_B = 0.51, \quad \alpha_{B_s} = 0.31, \quad \alpha_{B_c} = 0.08$$



B_s

- 既に高精度: $\Delta f_{B_s} \sim 0.6\%$ $\Delta(f_{B_s}/f_B) \sim 0.4\%$

- $B_s \rightarrow \mu\mu$ による新物理探索 $\Rightarrow \Delta\mathcal{B} \sim 4\%$

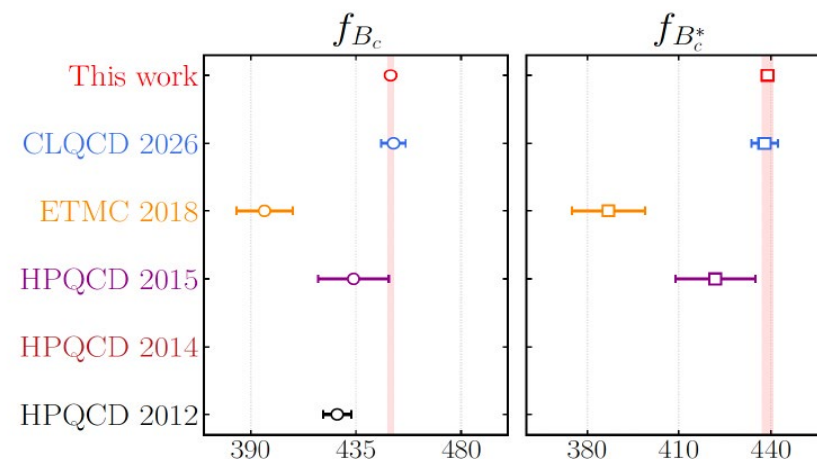
$\Leftrightarrow 11\%$ CMS@ICHEP'22 $\Rightarrow 4\%$ [HL-LHC]

B_c

- FCCによる高精度決定 $\Rightarrow |V_{cb}|$

- CLQCD '26 $f_{B_c} = 434(15)$ MeV [3.4%]

- Dhindsa+ @ Lat'26 $449.8(1.0)_{\text{stat}}$ MeV [0.2%]



- can expect more in the future

toward radiative leptonic decay $B \rightarrow \ell \nu \gamma$ ($\ell = e, \mu$)

- ヘリシティ抑制を回避 Belle: $\mathcal{B} < 4(e) - 3(\mu) \times 10^{-6} \Leftrightarrow \text{SM: } \ell \nu < 10^{-11} - 10^{-6}$
- $\ell = e, \mu$ を用いた $|V_{ub}|$? $\Leftrightarrow$ Belle II (B2TIP '19) $(\Delta \mathcal{B})_{\text{stat}} \sim 4\%$ (!)
- hard $\gamma \Rightarrow$ B中間子の内部構造 (LCDA, ...)

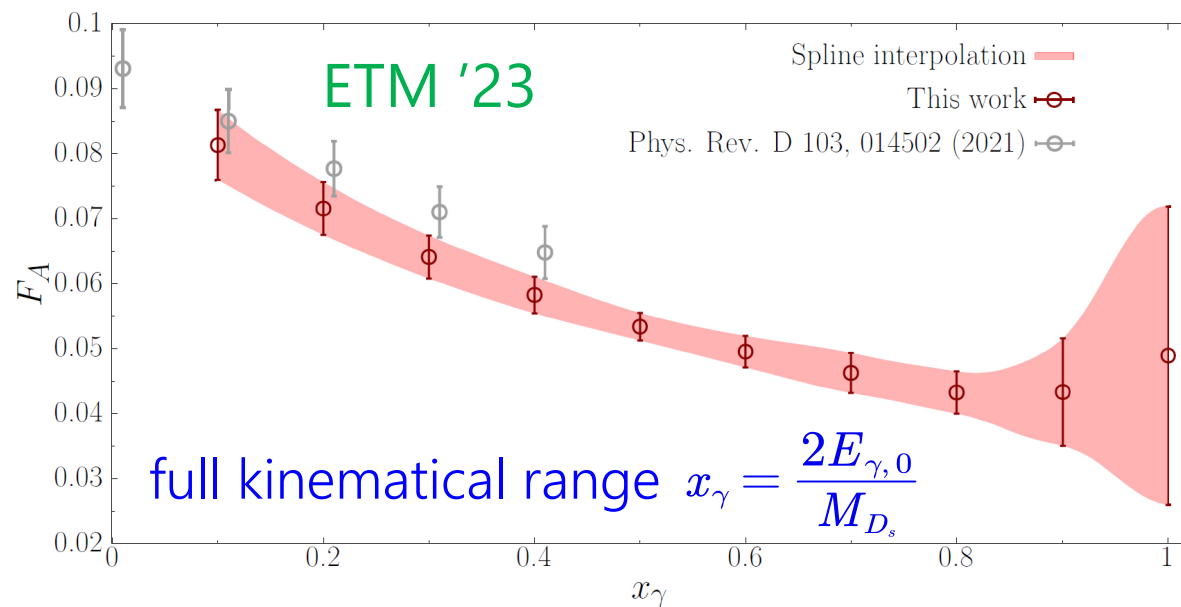
$$T_{\mu\nu} = -i \int d^4x e^{ip_\gamma x} \langle 0 | T(J_\mu^{\text{EM}}(x) J_\nu^{\text{weak}}(0)) | B(p) \rangle = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} p_\gamma^\rho v_B^\sigma F_V + i(-g_{\mu\nu} p_\gamma v_B + v_{B,\mu} p_{\gamma,\nu}) F_A + \dots$$

first lattice studies of $D_s \rightarrow \ell \nu \gamma$

Giusti+ 2302.01298 [$a^{-1} = 1.8\text{GeV}$, $M_\pi \sim 340\text{ MeV}$]

ETM 2306.05904 [$a \rightarrow 0$, @ $m_{ud'}$, $m_{s'}$, $m_{c, \text{phys}}$]

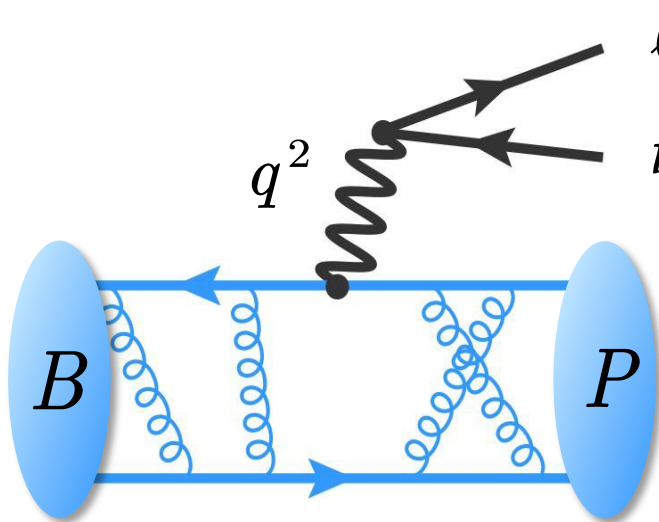
- exponentially suppressed signal
- 5-10%精度 for FFs (50% at $E_{\gamma,0,\text{max}}$ by $a \rightarrow 0$)
- ETM $\mathcal{B} [\text{SM}] = 4.4(3) \times 10^{-6}$: 7%精度
- + consistent w/ BESIII upper limit 1.3×10^{-4}



$B \rightarrow \ell \nu \gamma$ への拡張 $\Rightarrow$ 格段に大きい $E_{\gamma,0,\text{max}} = M_{D_s}/2 \rightarrow M_B/2$ (「"指数的"統計勝負」)

exclusive semileptonic decays

セミレプトニック崩壊と形状因子



– 運動量遷移 $q^2 = (p - p')^2$

– 反跳パラメタ $w = vv'$

$$v = p/M_B, \quad v' = p'/M_{D^*} \quad \text{no } O(m_Q)$$

– 反跳ゼロの極限 $\mathbf{p} = \mathbf{p}' = \mathbf{0}$

$$q^2_{\max} = (M_B - M_P)^2, \quad w_{\min} = 1$$

$$\langle P(p') | V_\mu | B(p) \rangle = \left\{ P - \frac{\Delta M^2}{q^2} q \right\}_\mu f_+(q^2) + \frac{\Delta M^2}{q^2} q_\mu f_0(q^2) \quad (P = p + p', \Delta M^2 = M_B^2 - M_\pi^2)$$

$$\frac{d\Gamma}{dq^2} = \frac{G_F^2}{24\pi^3} |V_{ub}|^2 \frac{(q^2 - m_\ell^2)^2 \sqrt{E_P^2 - M_P^2}}{q^4 M_B^2} \left\{ \left(1 + \frac{m_\ell^2}{2q^2} \right) M_B^2 (E_P^2 - M_P^2) |f_+(q^2)|^2 \right. \\ \left. + \frac{3m_\ell^2}{8q^2} (M_B^2 - M_P^2)^2 |f_0(q^2)|^2 \right\}$$

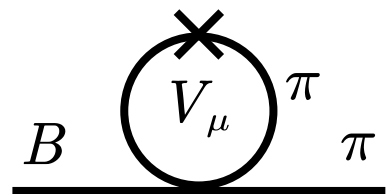
– $B \rightarrow V \ell \nu$ では形状因子は 4 つ

$b \rightarrow u \ell \nu : B \rightarrow \pi \ell \nu$

(本質的にはではないが) 難しい

- 高統計が必要 : Parisi-Lepage w/ $\alpha = 0.08 (K), 0.30(D), 0.51 (B)$
- 幅広い運動量遷移の領域 : $q^2_{\max} = (M_B - M_\pi)^2$
- valence $\pi \Rightarrow$ 大きく非解析的な M_π 依存性 $\Rightarrow$ 制御の難しい外挿

重中間子カイラル摂動論 (Bijnens-Jemos '11)

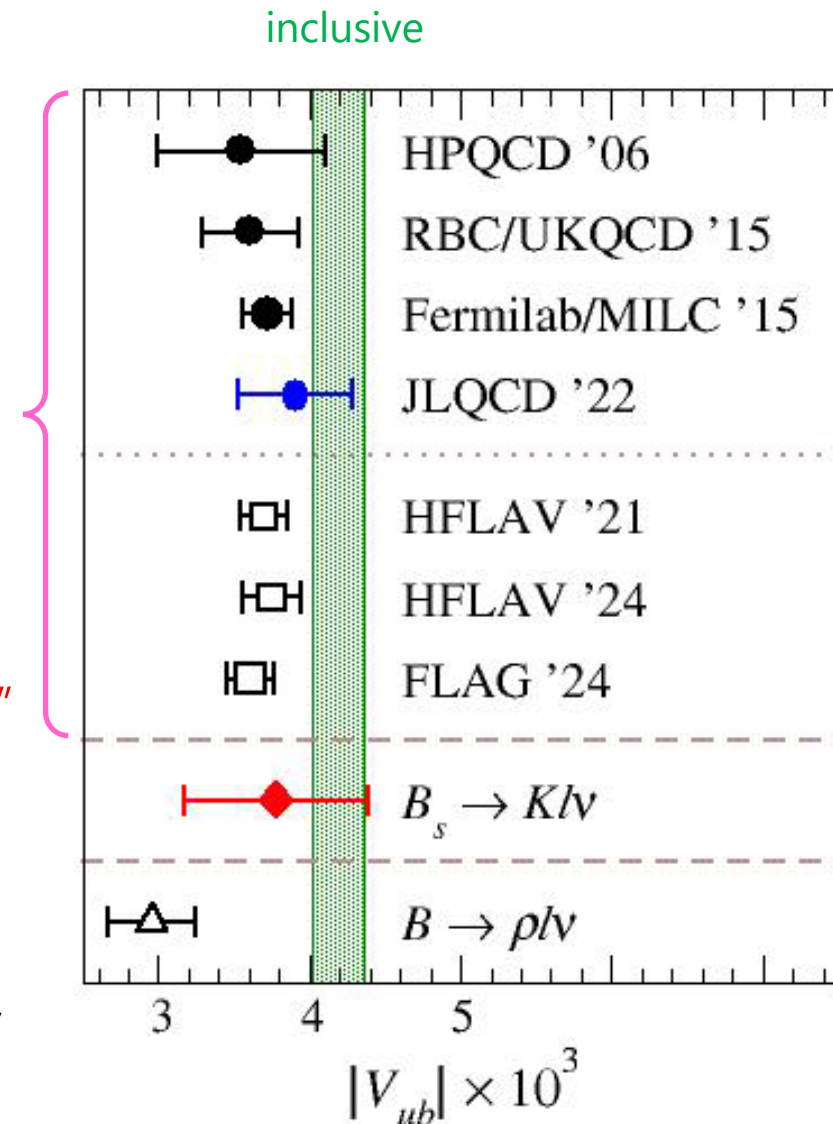


$$\delta f = -\frac{3}{4} (1 + 3g_{B^* B \pi}^2) M_\pi^2 \ln \left[\frac{M_\pi^2}{\Lambda^2} \right]$$

π ループ $\Rightarrow$ 非解析的な依存性 "カイラルログ"
 + 対称性で決まらない係数
 $\Rightarrow$ e.g. JLQCD'22の最大の不定性

約20年間で4つの研究(のみ)

- 最高精度は約10年前の Fermilab/MILC'15 : 最も軽い $M_\pi \sim 165$ MeV
- 世界平均も約10年間、この古い計算で決まっている...



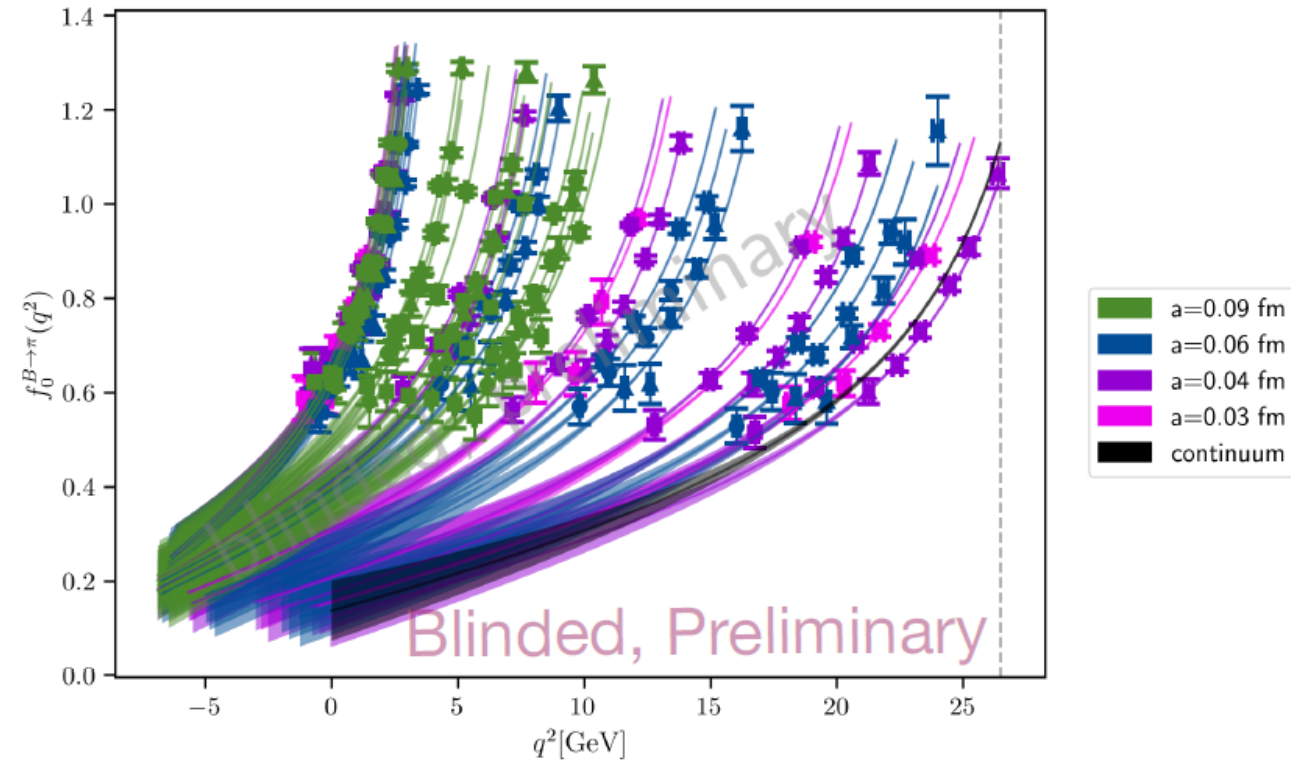
$b \rightarrow u \ell \nu : B \rightarrow \pi \ell \nu$

Fermilab/MILC @ Lattice '26

多くの進行中の計算

- Fermilab/MILC : relativistic, $M_{\pi, \text{phys}}$, $a^{-1} \leq 6.5$ GeV
- HPQCD : w/ similar gauge ensembles
- JLQCD : relativistic, " $M_{\pi, \text{phys}}$ ", $a^{-1} \leq 4.6$ GeV
- RBC/UKQCD : EFT, $M_{\pi, \text{phys}}$, $a^{-1} \leq 2.8$ GeV
- ALPHA : HQET(!), " $M_{\pi, \text{phys}}$ ", $a^{-1} \leq 5.0$ GeV

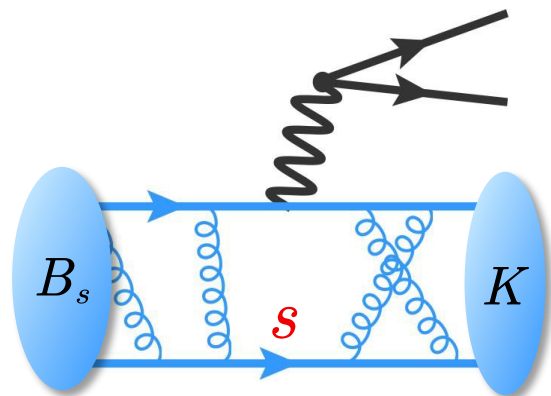
⇒ 多くの独立計算による検証が重要



主観的なtarget

- HFLAV'24 : $|V_{ub}| = 3.75(6)_{\text{exp}}(19)_{\text{th}} \times 10^{-3}$
- 5 years : $\Delta f_+(q^2) \sim 2\text{-}5\% \text{ @ } q^2 = q^2_{\text{max}} - 15 \text{ GeV}^2$
- 10 years : similar @ $q^2 = q^2_{\text{max}} - 15 \text{ GeV}^2$

$b \rightarrow u \ell \nu : B_s \rightarrow K \ell \nu$



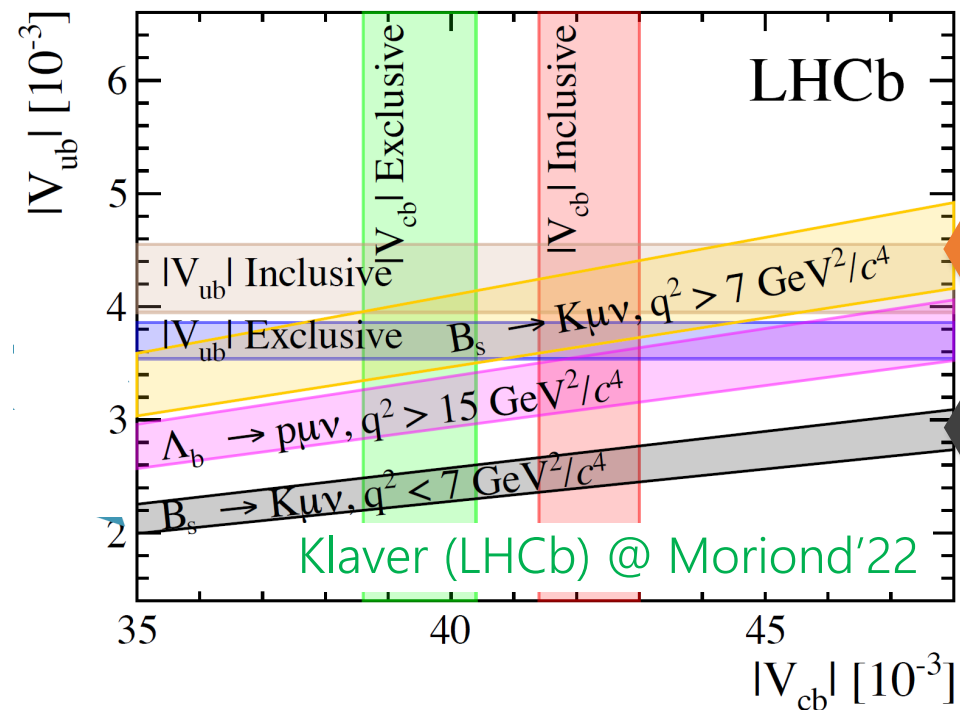
“ $B \rightarrow \pi \ell \nu$ ”

w/ s spectator

格子QCDでは $B \rightarrow \pi \ell \nu$ より有利

- Parisi '83, Lepage '89 $\Rightarrow$ 統計ゆらぎが小さい
- 抑制されたカイラルログ $\Rightarrow$ カイラル外挿 ($\rightarrow M_{\pi, \text{phys}}$) を制御

$$\frac{\Delta C_{2\text{pt}}^{\bar{Q}q}(t)}{C_{2\text{pt}}^{\bar{Q}q}(t)} \sim \exp[\alpha t], \quad \alpha_{\bar{Q}q} = M_{\bar{Q}q} - \frac{M_{\bar{Q}Q} + M_{\bar{q}q}}{2} \quad \begin{matrix} \alpha_B = 0.51 \\ \alpha_{B_s} = 0.31 \end{matrix}$$

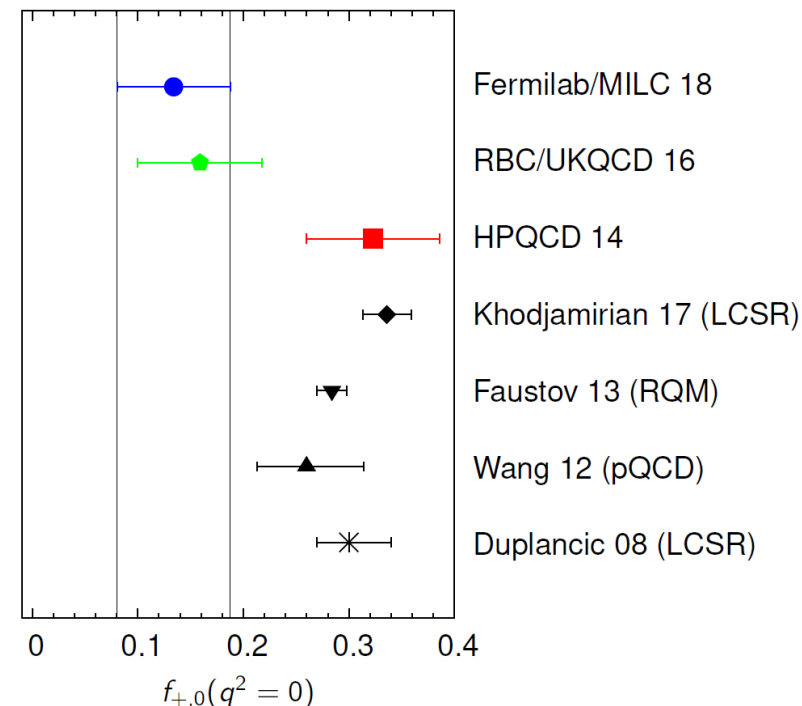


$$\frac{B_s \rightarrow K \mu \nu}{B_s \rightarrow D_s \mu \nu} \Rightarrow \frac{|V_{ub}|}{|V_{cb}|}$$

$q^2 > 7 \text{ GeV}^2$
w/ lattice FFs
(Fermilab/MILC'19)

$q^2 < 7 \text{ GeV}^2$
w/ LCSR FFs
(Khodjamirian+'17)

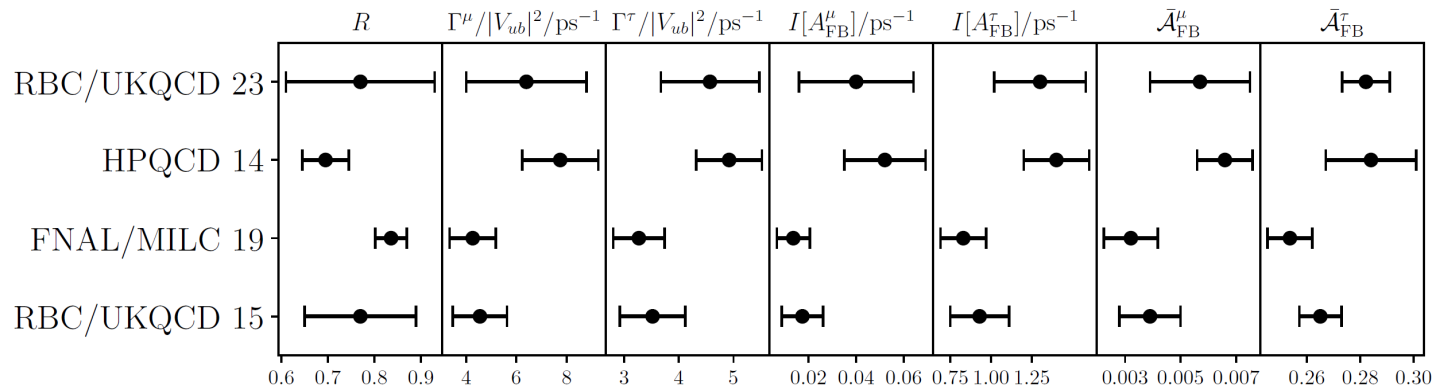
Fermilab/MILC '19



$b \rightarrow u \ell \nu : B_s \rightarrow K \ell \nu$

RBC/UKQCD 2303.11280 w/ larger $a^{-1} \sim 2.8\text{GeV}$ ($M_\pi \sim 260\text{ MeV}$)

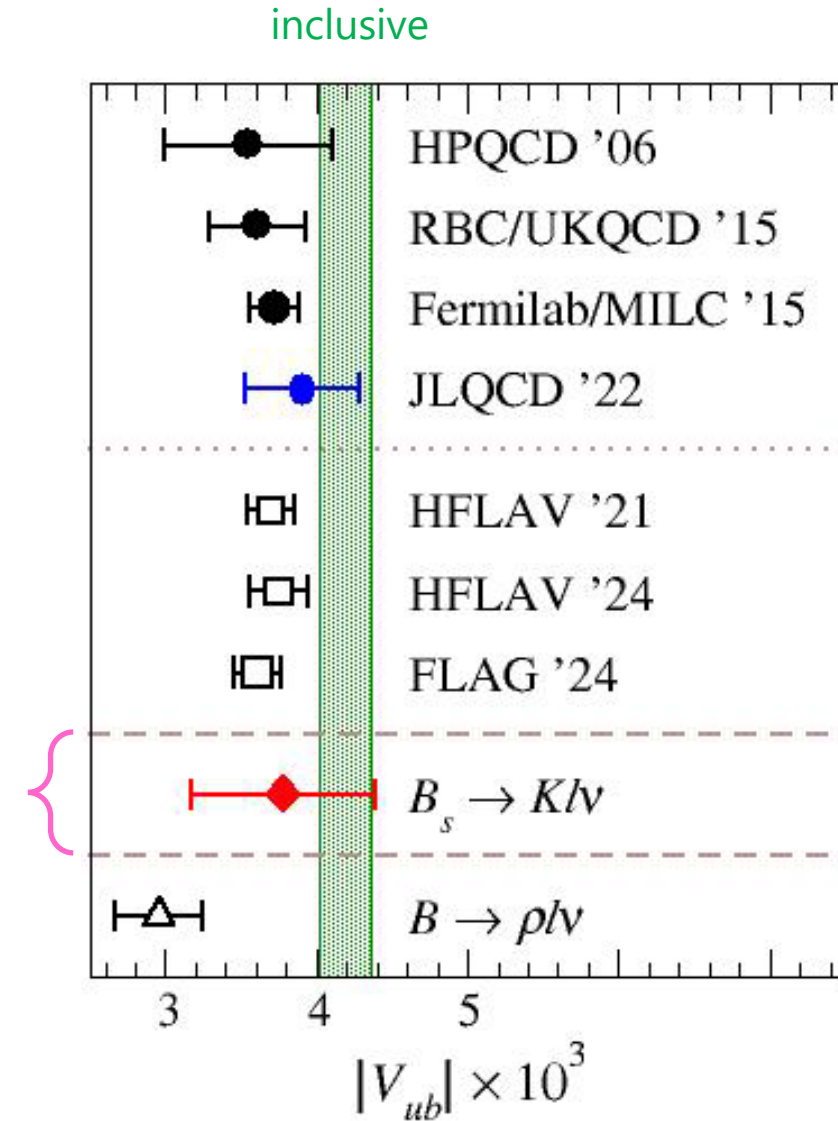
- 5% error at simulated $q^2 \Rightarrow \geq 10\%$ towards $q^2 = 0$
- largest from stat., extrap.
- consistent w/ previous studies : **inconsistency not resolved**



- w/ LHCb $\mathcal{B}(B_s \rightarrow K \ell \nu) / \mathcal{B}(B_s \rightarrow D_s \ell \nu) \otimes \mathcal{B}(B_s \rightarrow D_s \ell \nu) \otimes \tau_{B_s}$
 $\Rightarrow |V_{ub}| = 3.78(61) \times 10^{-3}$ w/ 16% error $\Rightarrow 10\%$ th, 13% ex

target

- $B \rightarrow \pi \ell \nu$ と同程度(以上)の精度 $\Leftrightarrow$ JLQCD (talk by Tokoro), Fermilab/MILC, HPQCD, RBC/UKQCD, ALPHA



$b \rightarrow u \ell \nu : B \rightarrow \rho \ell \nu$

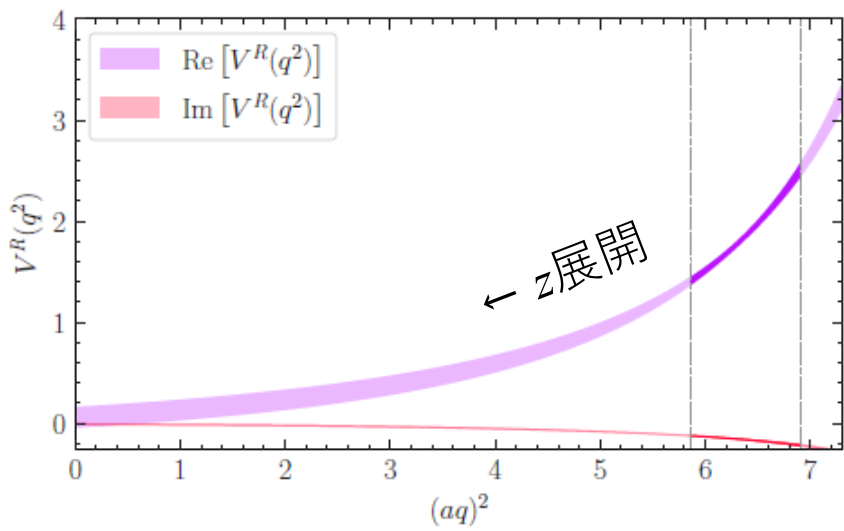
Bernlochner+ '21

- w/ LCSR estimate for FFs
- $|V_{ub}| = 2.96(29) \times 10^{-3}$ [10% error, -2.1σ below from $B \rightarrow \pi \ell \nu$]

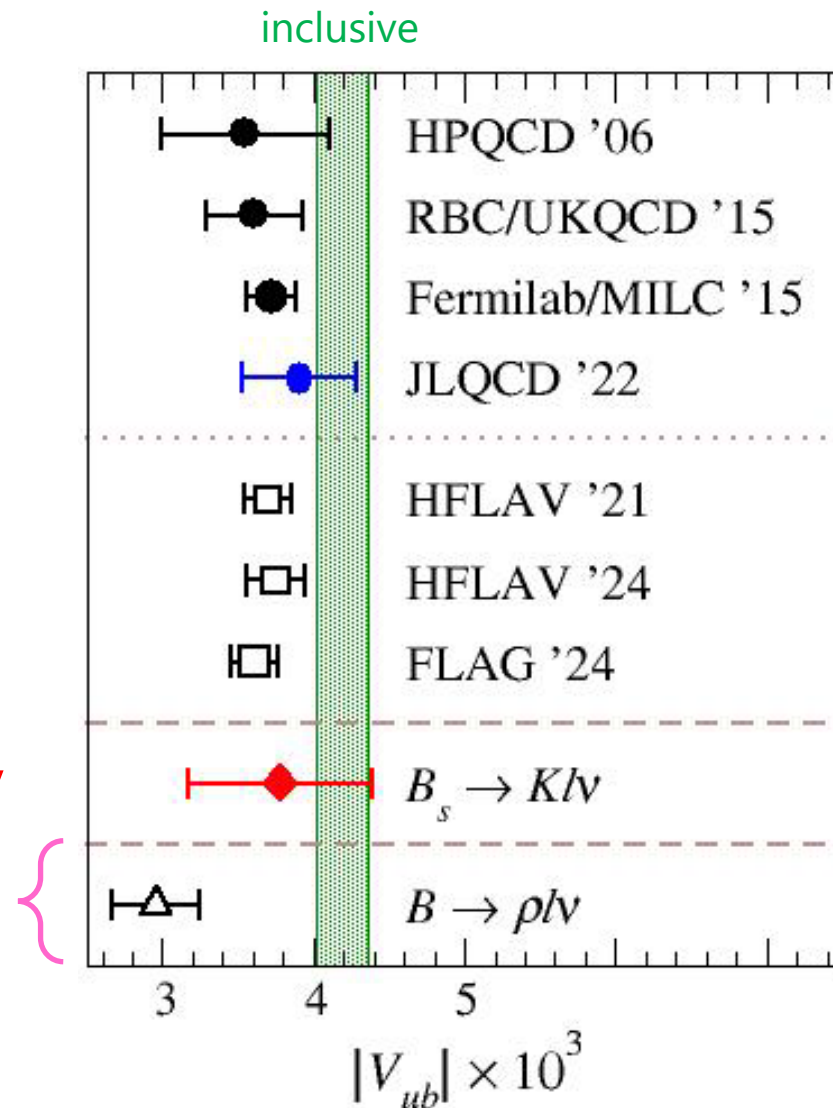
Leskovec+ '25 (PRL)

- ρ は不安定粒子($\rightarrow$ Maiani-Testa), しかし殆ど $\rho \rightarrow \pi\pi$ に崩壊
- 4つの形状因子 $V, A_0, A_1, A_{12}(q^2, s_{\pi\pi})$ を計算する "Lellouch-Lüscher"

$$e.g. \langle \pi\pi | V_\mu | B \rangle = \frac{2i}{M_B + \sqrt{s_{\pi\pi}}} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon'^\nu v'^\rho v^\sigma V(q^2, s_{\pi\pi})$$



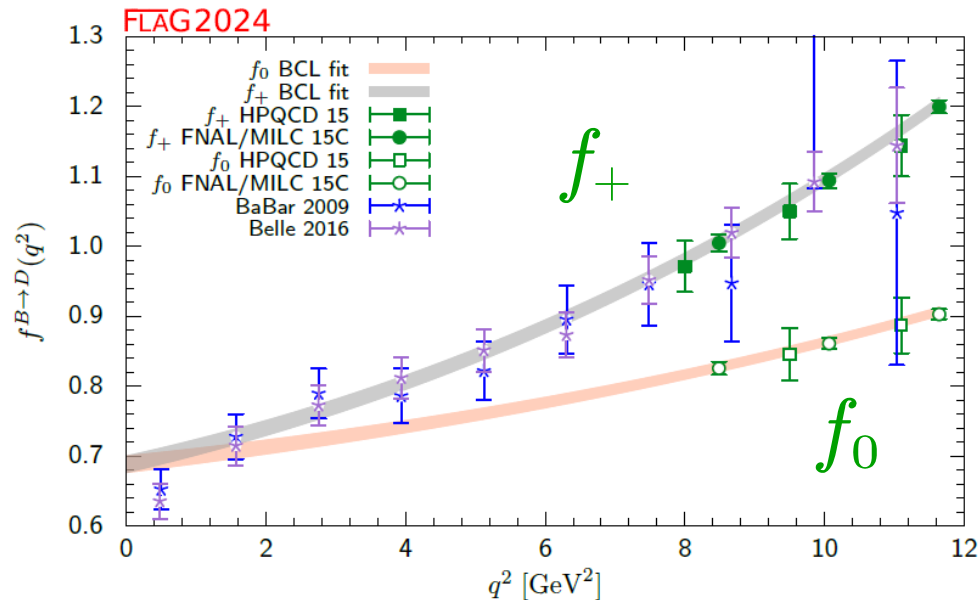
- 1st lattice calculation
@ $a^{-1} = 1.8$ GeV, $M_\pi = 320$ MeV
- 4つの全ての形状因子
+ z 展開で内外挿
- 細かい格子、 $M_{\pi, \text{phys}}$ への拡張
はstraightforward



$b \rightarrow c \ell \nu : B \rightarrow D \ell \nu$

約10年前の 2 つの研究

Fermilab/MILC '15 ("HQET" b), HPQCD '17 (NRQCD b)

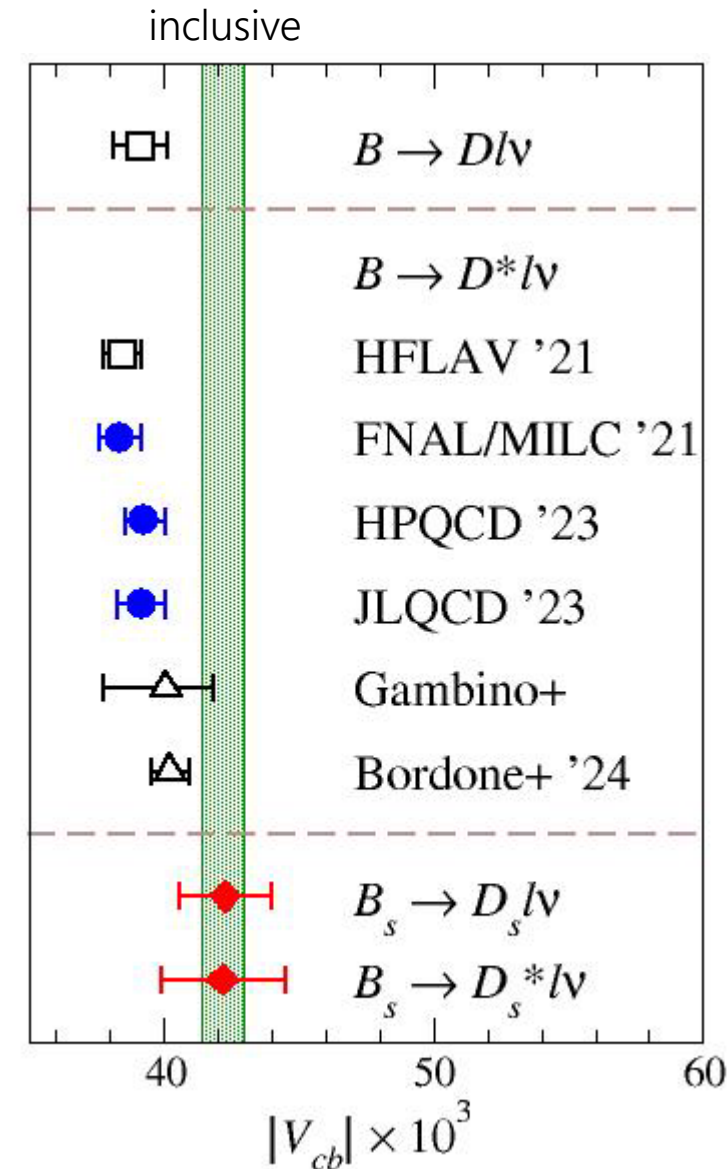


- good consistency
- $|V_{cb}| = 40.0(1.0) \times 10^{-3}$
- $R(D) = 0.2938(54)$
(FLAG '24)

- ゲージ配位を共有 $\Rightarrow$ 完全な独立計算ではない
- 有効理論"b" $\Rightarrow$ matching による誤差を避けられない

relativisticを含めた独立計算

- 進行中: Fermilab/MILC (rel), RBC/UKQCD (EFT), JLQCD (Hiraiwa)(rel)

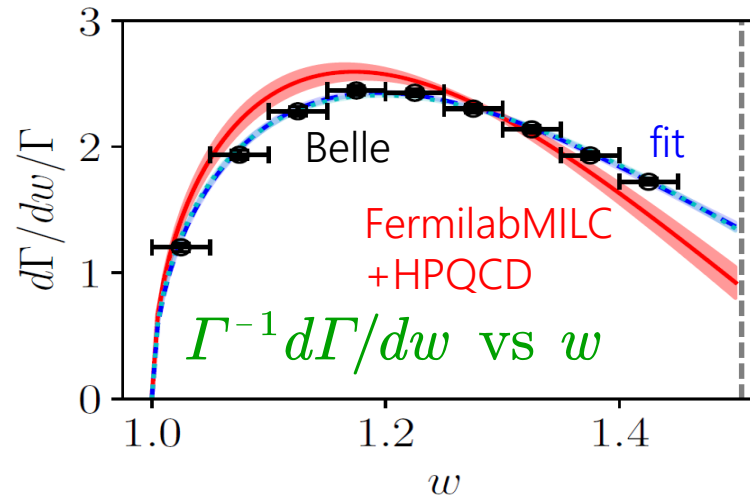
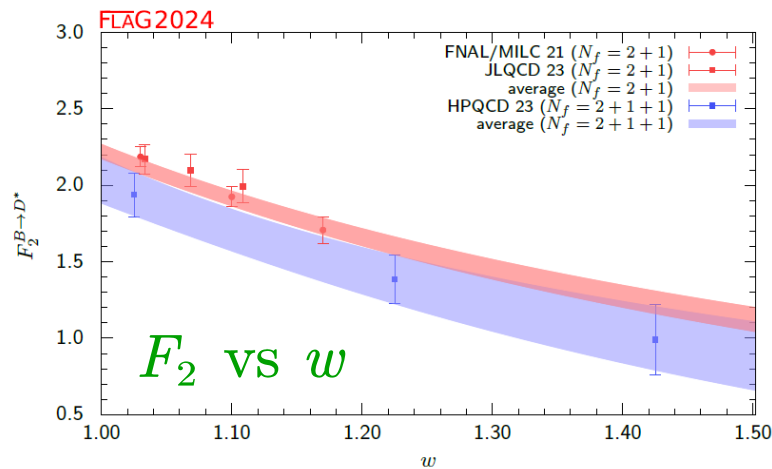


$b \rightarrow c \ell \nu : B \rightarrow D^* \ell \nu$

'21-'23の全てのFFsの計算

Fermilab/MILC '21 ("HQET" b), HPQCD '23, JLQCD '23 (relativistic)

– FFsの(中心値 $\pm$ 誤差)はconsistent $\Leftrightarrow$ 観測量によっては矛盾 $\Rightarrow$ 相関?

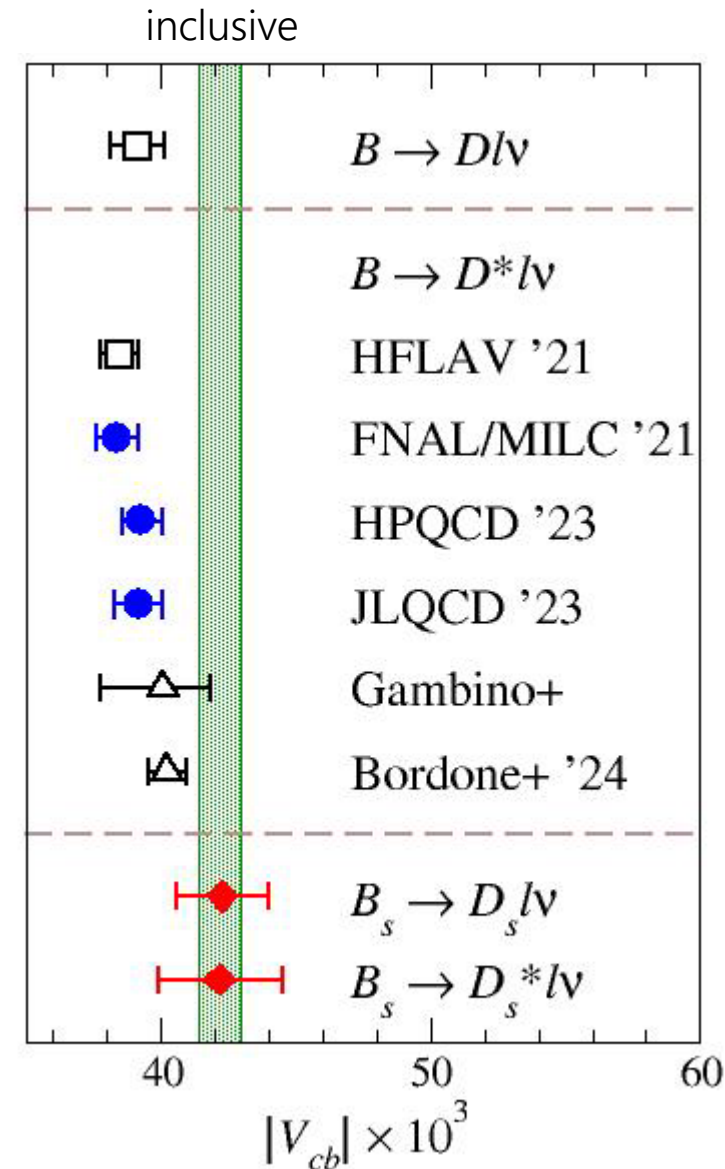


– $|V_{cb}|$, $R(D^*)$ の値は"consistent" : $|V_{cb}|=39.2(7) \times 10^3$, $R(D^*)=0.258(5)$

– 殆どの格子QCD研究の系統誤差 = |解析A-解析B| $\Leftrightarrow 1\sigma$

より meaningfulな誤差評価 (他の崩壊も!) $\oplus$ large recoilへの拡張

– 進行中: RBC/UKQCD (EFT), Fermilab/MILC (rel), JLQCD (rel)



$b \rightarrow c \ell \nu : B_s \rightarrow D_s^{(*)} \ell \nu, B_c \rightarrow J/\psi \ell \nu$

all by HPQCD!

$B_s \rightarrow D_s^{(*)} \ell \nu$ HPQCD '15, '17, '22

– (NRQCD $\rightarrow$) relativistic b , $m_b \leq 3.6$ GeV, $\alpha^{-1} \leq 4.5$

$$|V_{cb}| \times 10^3 = 42.3(1.2)_{\text{lat}}(1.2)_{\text{exp}} [B \rightarrow D_s]$$

$$43.0(2.1)_{\text{lat}}(1.7)_{\text{exp}}(0.4)_{\text{EM}} [B \rightarrow D_s^*]$$

– 4-6%誤差で $B \rightarrow D^{(*)} \ell \nu$ と $B \rightarrow X_c \ell \nu$ の両方と consistent

– 大きい誤差：統計、 $O((am_Q)^n)$ 離散化誤差

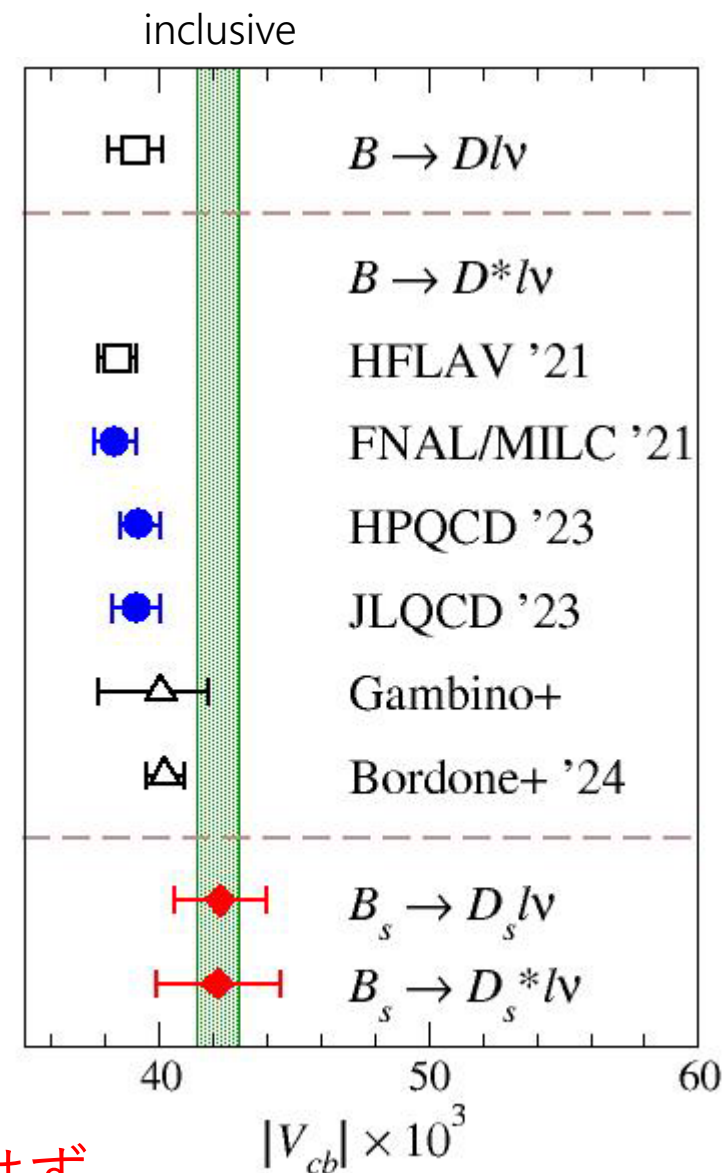
$$R(D_s) = 0.2987(46), R(D_s^*) = 0.2637(69)$$

$B_c \rightarrow J/\psi \ell \nu$ HPQCD '20, '25

– relativistic b , $m_b \leq 4.5$ GeV $\sim m_{b,\text{phys}}$ (!), $\alpha^{-1} \leq 6.0$ GeV (!)

$$R(J/\psi) = 0.2597(27) \Leftrightarrow 0.71(25) \text{ (LHC '18)}$$

$$\Delta(\Gamma/\eta_{\text{EW}}|V_{cb}|^2) \sim 2.4\% \Rightarrow |V_{cb}| \text{ の } 1\text{-}2\% \text{ 決定?}$$



独立計算が必要！ $B_s \rightarrow D_s^{(*)} \ell \nu$ は $B \rightarrow D^{(*)} \ell \nu$ と同程度以上になれるはず

inclusive decays

B meson inclusive semileptonic decays

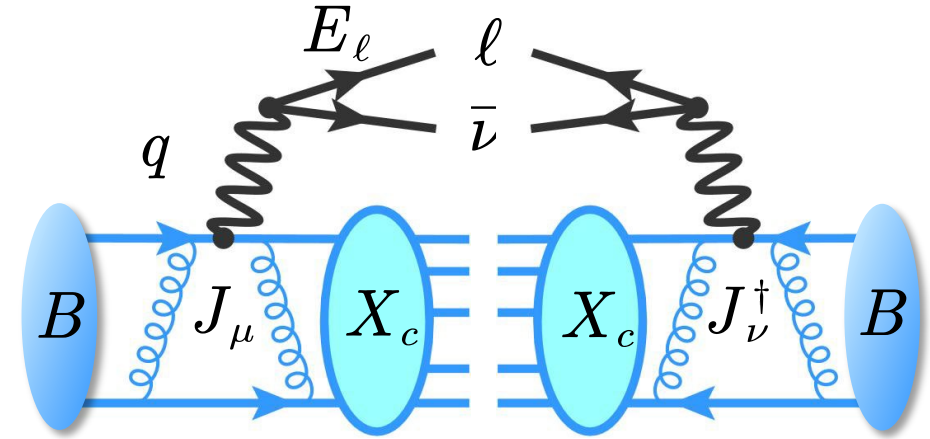
e.g. $B \rightarrow X_c \ell \nu = D \ell \nu + D^* \ell \nu + \dots$ インクルーシブ崩壊率

$$\frac{d\Gamma(B \rightarrow X_c \ell \nu)}{d\mathbf{q}^2 dq_0 dE_\ell} = \frac{G_F^2}{8\pi^3} |V_{cb}|^2 L^{\mu\nu} W_{\mu\nu}$$

$$W_{\mu\nu} \sim \sum_{X_c} \langle B | J_\mu^\dagger | X_c \rangle \langle X_c | J_\nu | B \rangle = \text{im} \langle B | J_\mu^\dagger \otimes J_\nu | B \rangle$$

hadronic tensor

光学定理



従来の理論解析：演算子積展開

$$W_{\mu\nu} = \sum_{\mathcal{O}} \frac{c_{\mathcal{O}}(\alpha_s)}{m_b^{n_{\mathcal{O}}}} \langle B | \mathcal{O} | B \rangle$$

α_s と $1/m_Q$ についての二重展開：収束性？

行列要素の非摂動計算？ $\Leftrightarrow$ lattice QCD : e.g. JLQCD '02

inclusive崩壊 $\neq$ exclusive崩壊の単純和ではない $\Rightarrow$ CKM行列要素決定の非自明なチェック

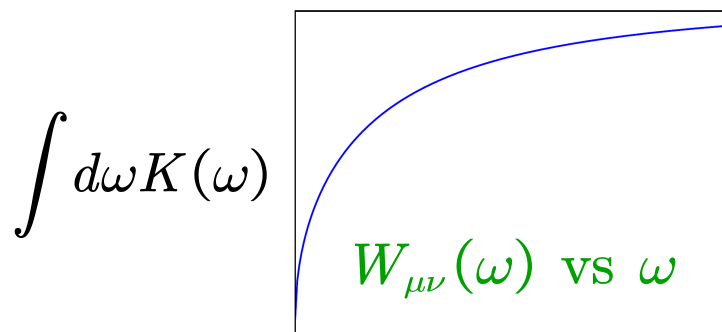
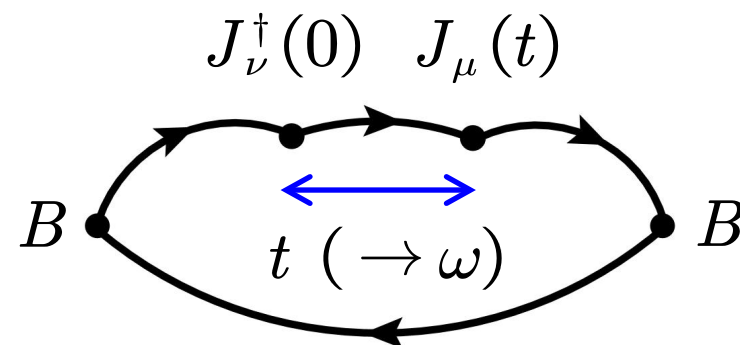
格子QCD $\Leftrightarrow$ hadronic tensor $W_{\mu\nu}$ の直接計算

新しいアイデア

$$C_{\mu\nu}(t, \mathbf{q}) = \langle B | J_{\mu}^{\dagger}(-\mathbf{q}) e^{-Ht} J_{\nu}^{\dagger}(\mathbf{q}) | B \rangle = \int_0^{\infty} d\omega W_{\mu\nu}(\omega, \mathbf{q}) e^{-\omega t}$$

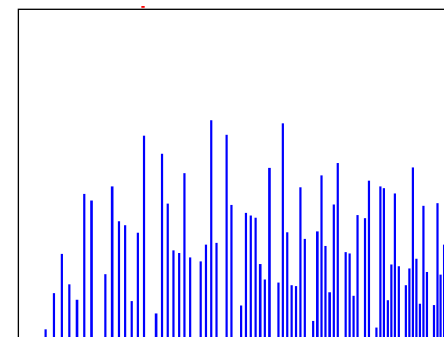
$C_{\mu\nu}(t) \Rightarrow W_{\mu\nu}(\omega)$: 不良設定の逆問題

- 有限体積 $\Rightarrow W_{\mu\nu}(\omega)$ の関数形が大きく変わる
- 統計誤差を持つ $C_{\mu\nu}(t)$ のデータが、離散的な t でのみ利用可能



$L \rightarrow \infty$

$$\sim \int d\omega K_{L,\sigma}(\omega)$$



finite V

Hashimoto '17, Hansen+ '17, Gambino-Hashimoto '20

$W_{\mu\nu}(\omega)$ そのものでなく、そのエネルギー積分=微分崩壊率なら良い精度で計算可能と期待

$$\frac{d\Gamma}{d\mathbf{q}^2} = \frac{G_F^2}{24\pi^3} |V_{cb}|^2 \sqrt{\mathbf{q}^2} \bar{X}(\mathbf{q}^2) \quad \bar{X}(\mathbf{q}^2) = \int_0^{\infty} d\omega K_{\mu\nu,\sigma}(\omega, \mathbf{q}^2) W_{\mu\nu,L}(\omega, \mathbf{q}^2)$$

$D_s \rightarrow X_{ss} \ell \nu$

KEK-CERN-Mainz-SOTON '25, '26

Kellermann @ Lattice '26

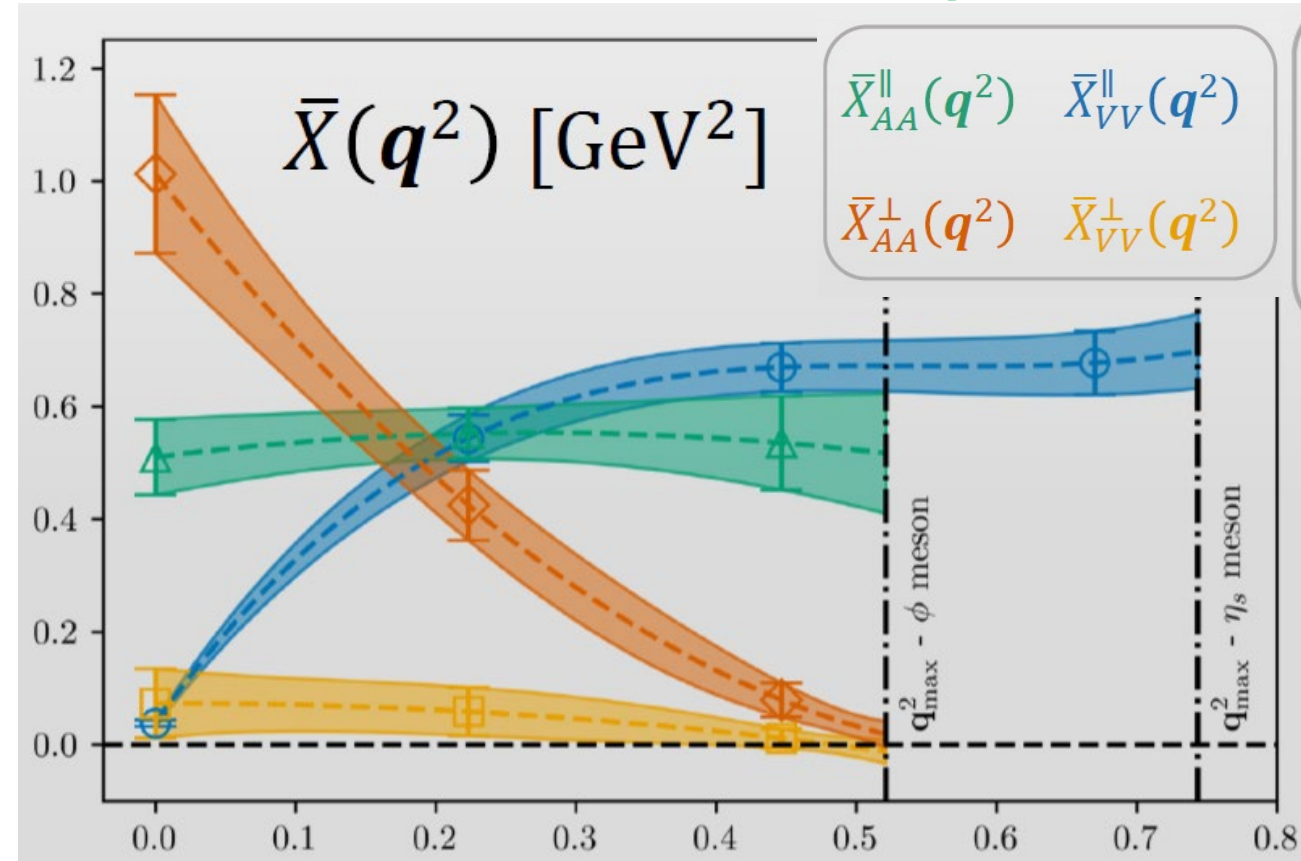
- $D_s \rightarrow X_{ss} \ell \nu$: no valence ud , b ; $\alpha^{-1} > m_c$
 $\Rightarrow$ カイラル外挿, 連続極限への外挿は制御可
 $\Rightarrow$ inclusive計算の良いtesting ground
- 非自明な有限体積効果も $L \geq 2.5\text{fm}$ で小さい

$$\bar{X}(q^2) = \int_0^\infty d\omega K_{\mu\nu,\sigma}(\omega, q^2) W_{\mu\nu,L}(\omega, q^2)$$

$$\frac{\Gamma}{|V_{cs}|^2} = \frac{G_F^2}{24\pi^3} \int_0^{q_{\text{max}}^2} dq^2 \sqrt{q^2} \bar{X}(q^2)$$

$$= 0.856(46)_{\text{stat}}(49)_{\text{sys}} \times 10^{-13} \text{GeV}$$

ETM '25: $0.853(46)_{\text{stat}}(30)_{\text{sys}} \times 10^{-13} \text{GeV}$



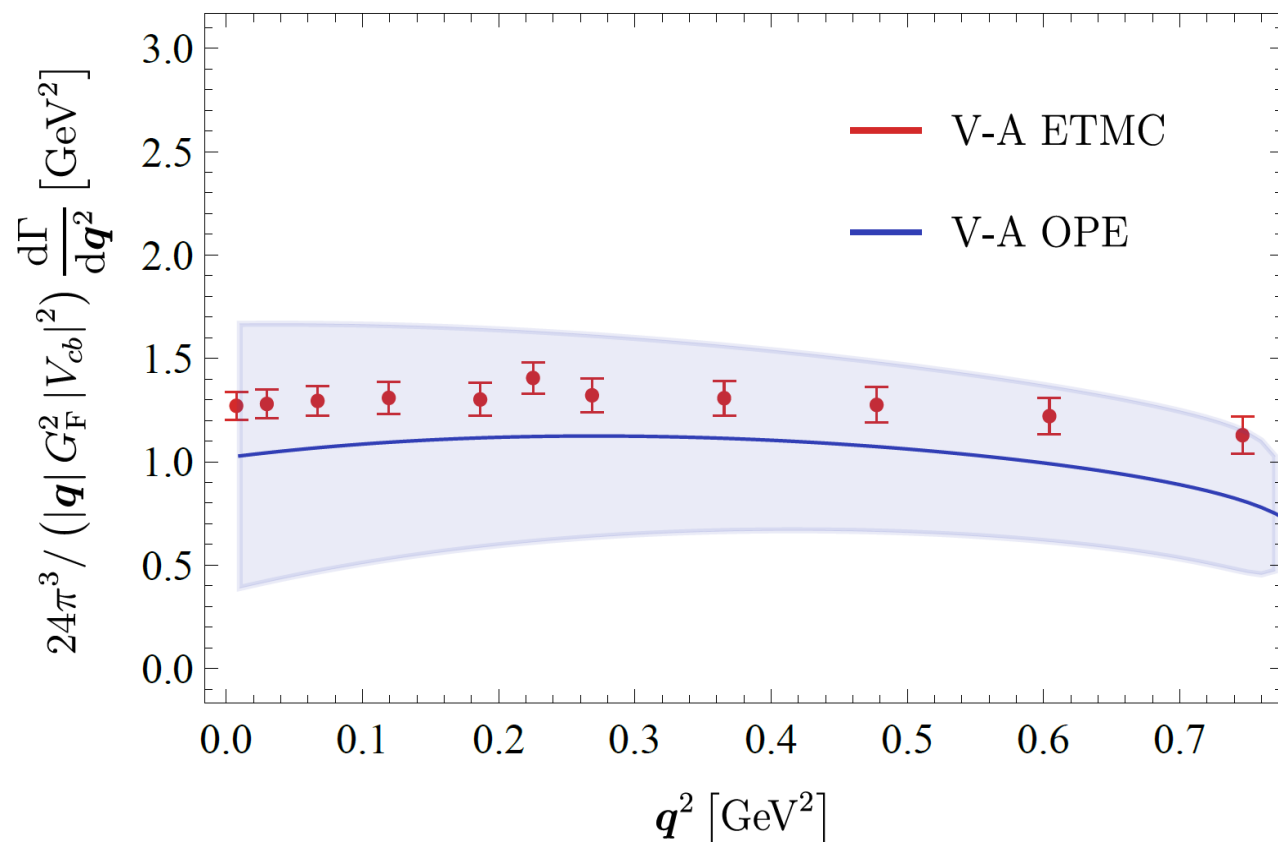
$J_\mu J_\nu = A_\mu A_\nu, V_\mu V_\nu$; $\parallel, \perp = q_\mu$ に対する偏極

$\Gamma/|V_{cs}|^2$ の9%計算、 $|V_{cs}|$ の5%決定が可能に! $\Leftrightarrow \Delta\Gamma \sim 2\text{-}3\% @ \text{BESIII}$

$\Rightarrow$ 大きい誤差(統計, 外挿)はsystematicに削減可能。モーメントへの拡張

vs OPE

理論同士の比較は非物理的なクォーク質量でも(より詳細に) 可能



Gambino+ '22

- $B_s \rightarrow X_{sc} \ell \nu$
- unphysical m_b both for lattice & OPE
- OPE
 - + $O(1/m_b^3)$ 補正, 実験データのfit $\Rightarrow$ 行列要素
 - + $O(\alpha_s)$ radiative correction
- note: latticeデータは統計誤差のみ

微分崩壊率 : OPEとlatticeの良い一致を確認

Gambino-Hashimoto '20 : OPEの次数を上げるほど一致が良くなることも確認

$$B_s \rightarrow X_{sc} \ell \nu$$

De Santis (ETM) @ Lattice '26

ETM '26

- $N_f=4$, $a^{-1} = 2.5 - 3.9$ GeV, $M_{\pi,phys}$
- b : 現実より小さい m_b ($M_{B_s} \leq 4.3$ GeV) と static の内挿

KEK-CERN-Mainz-SOTON in preparation

- $N_f=3$, $a^{-1} = 1.8 - 2.8$ GeV, $M_{\pi,phys}$
- b : "HQET"-based @ $m_{b,phys}$

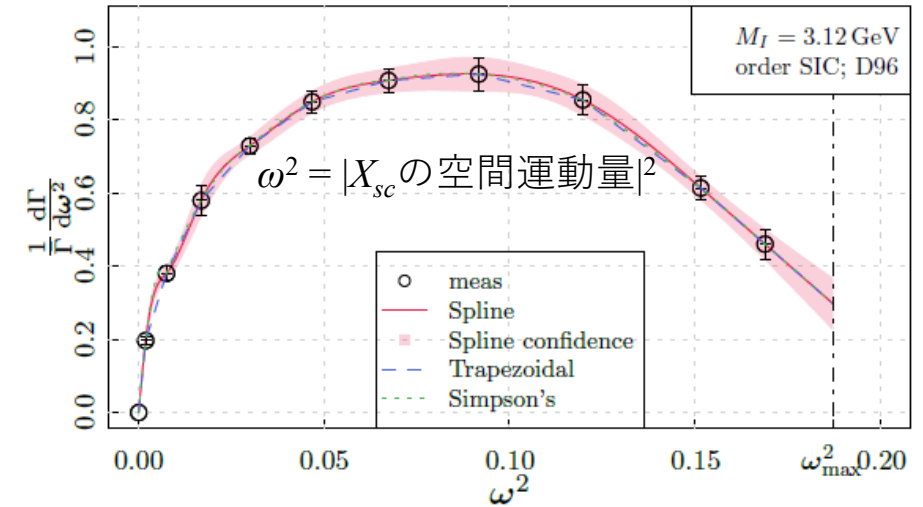
いずれも

- 複数の格子体積を用いて有限体積効果を補正
- 連続極限への外挿も制御

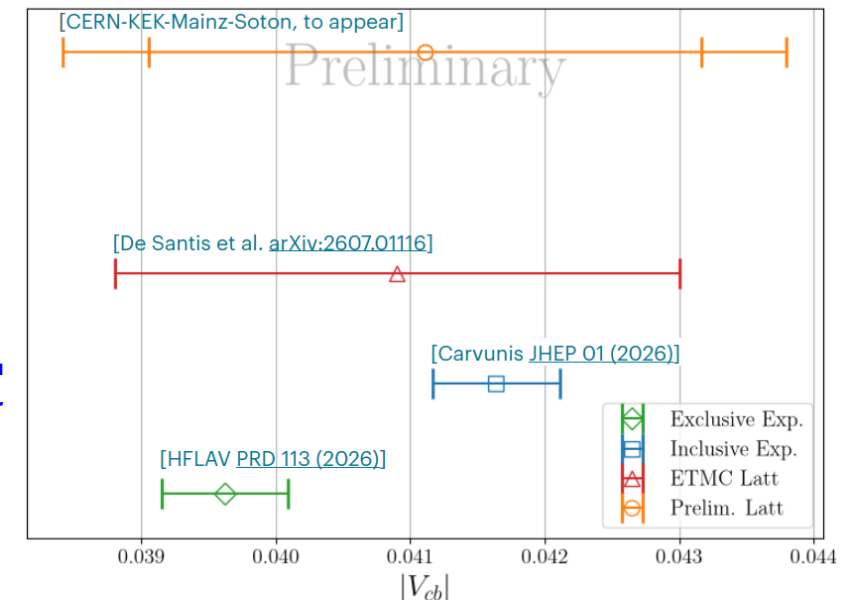
⇒ 5-7%精度で $|V_{cb}|$ を決定できるようになった

※ 実験値は Belle '14 $B_s \rightarrow X \ell \nu$ で $B_s \rightarrow X_{us} \ell \nu$ が無視できると仮定

inclusive崩壊は定量的計算が可能に



Jüttner (review) @ Lattice '26



まとめ

格子QCD研究の 主要な 主観的に選んだ最近の進展

多スケール問題の精密計算

- leptonic崩壊は既に高精度
- exclusive semileptonicは、多くのプロセスで現在高精度化中。今後5年間に期待
 - + セットアップ: $M_{\pi,phys}(B \rightarrow \pi \ell \nu)$, $a^{-1} > m_b$ での m_b 直上計算 (HPQCD $B_c \rightarrow J/\psi \ell \nu$)
 - + 誤差評価 ~~{解析A-解析B}~~

多粒子状態・不安定粒子への崩壊への応用

- frameworkの開発により急速に広がっている
 - + Lellouch-Lüscher: $B \rightarrow \rho \ell \nu$
 - + inclusive崩壊: $D_s \rightarrow X_{ss} \ell \nu$, $B_s \rightarrow X_{cs} \ell \nu \Rightarrow$ 対応するCKM行列要素の5%決定
(hadronic τ decay $\Rightarrow |V_{ud}|$, $|V_{us}|$, $B \rightarrow K^* \ell \ell$, ...)