

メビウスドメインウォールフェルミオンを用いた格子QCDによる $B_s \rightarrow K l \nu$ 形状因子の計算

所 順也 (大阪大学 D1)

共同研究者： 深谷英則(大阪大学) 橋本省二(KEK) 金児隆志(KEK)
(JLQCD collaboration)

目次

- 研究背景と動機
- 格子設定と解析結果
- まとめと今後の課題

目次

- 研究背景と動機
- 格子設定と解析結果
- まとめと今後の課題

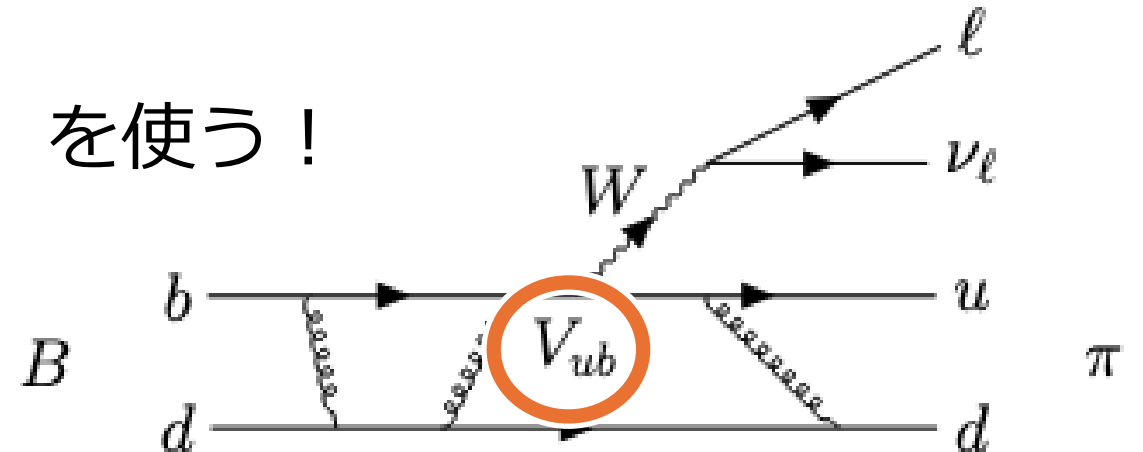
研究背景

セミレプトニック崩壊 = 終状態がハドロンとレプトンになる崩壊
→CKM行列要素が入ったダイアグラムを書ける

レプトン部分は弱い相互作用で摂動計算できる

ハドロン部分は強い相互作用で摂動計算できない…

→非摂動計算が可能な「格子QCD」を使う！

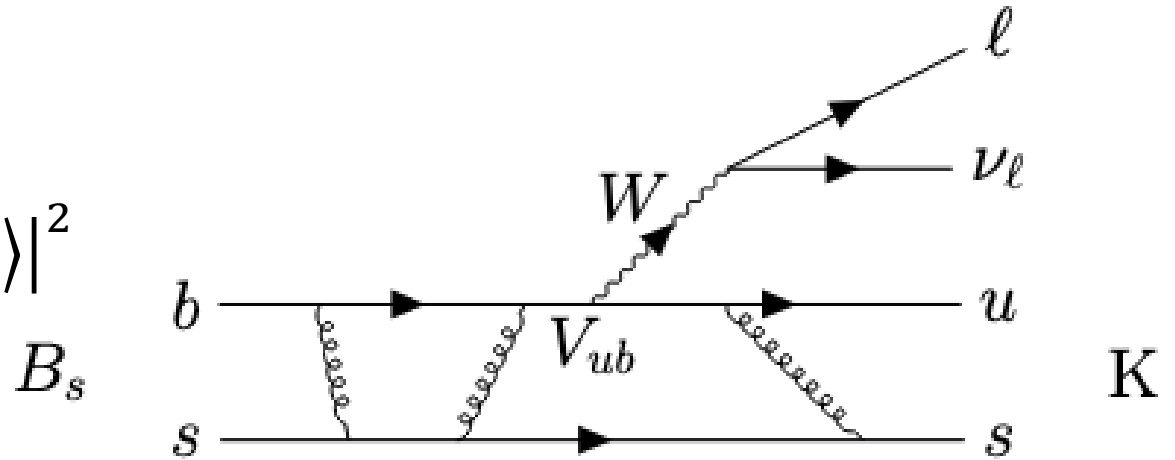


研究背景

本研究の目的： u, b に関するCKM行列要素 $|V_{ub}|$ の精密な決定

考える崩壊過程： $B_s \rightarrow Kl\nu$

$$\text{微分崩壊率} : \frac{d\Gamma}{dq^2} \propto |V_{ub}|^2 |\langle K | \bar{u} \gamma_\mu b | B_s \rangle|^2$$



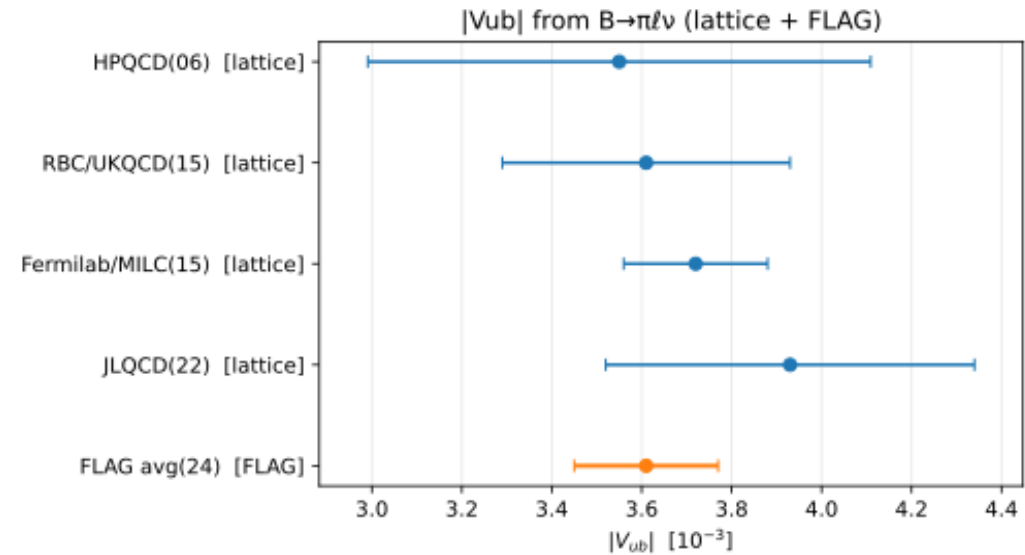
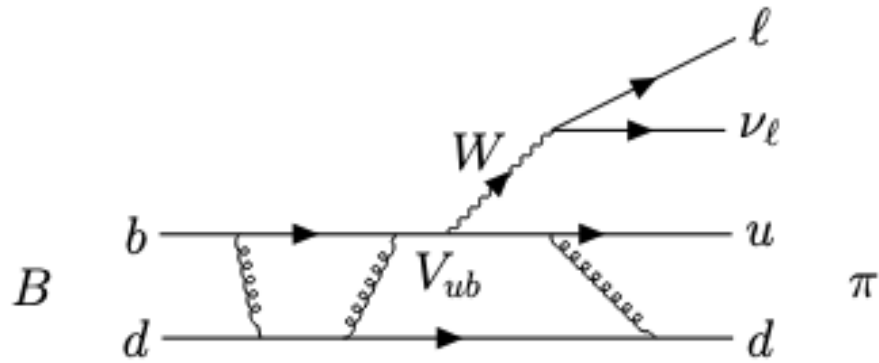
(微分)崩壊率：実験で測られる量

ハドロン行列要素：格子QCDで計算される量

→実験＋格子QCDで $|V_{ub}|$ を決定できる！

研究背景

他の過程 $B \rightarrow \pi l \nu$ も V_{ub} を含み、複数の格子グループで調べられている



$B_s \rightarrow K l \nu$ でも計算して独立な結果を出し、比較！

外線に π が無く、カイラル外挿が安定が期待される
重い方が統計的に有利

→昨日の金児さんのトーク

研究背景

$B_s \rightarrow K l \nu$ の現状は？

格子計算：HPQCD(14), RBC/UKQCD(23), Fermilab/MILC(19) で計算された

→JLQCDも独立な計算結果を出そう（この研究）
（カイラル対称性が良いメビウスドメインウォールフェルミオンが重要）

実験：LHCbでこの過程が観測された(21)

まだ実験からの微分崩壊率がなく、CKMの高精度の決定には至っていない

→今後の実験精度の向上と本過程からのCKM決定が期待される！

目次

- 研究背景と動機(レビュー)
- 格子設定と解析結果
- まとめと今後の課題

格子のパラメータ設定

2+1フレーバー (u,d,s)メビウスドメインウォールフェルミオン (bはrelativistic)

	a [fm]	β	$L^3 \times N_t \times L_s$	N_{cfg}	am_l	am_s	am_Q
$a^{-1} \cong 2.453[\text{GeV}]$	0.080	4.17	$32^3 \times 64 \times 12$	100	0.0070	0.0400	0.44037, 0.55046, 0.68808
	0.080	4.17	$32^3 \times 64 \times 12$	100	0.0190	0.0400	0.44037, 0.55046, 0.68808
$a^{-1} \cong 3.588[\text{GeV}]$	0.055	4.35	$48^3 \times 96 \times 8$	50	0.0080	0.0250	0.27287, 0.34109, 0.42636, 0.53295, 0.66619
	0.055	4.35	$48^3 \times 96 \times 8$	50	0.0120	0.0250	0.27287, 0.34109, 0.42636, 0.53295, 0.66619

上から2番目のシミュレーションでは $M_\pi \cong 500[\text{MeV}]$, $m_Q \sim m_c < m_b$

→物理点でのシミュレーションではない

いくつかのパラメータ点で解析して、カイラル外挿、重クォーク外挿などをする必要がある

相関関数の解析

(時間的) 2点関数 :

$$c_2^M(t, \vec{p}) = \sum_x \langle 0 | O_M(\vec{x}, t) O_M^\dagger(\vec{0}, 0) | 0 \rangle e^{-i\vec{p}\vec{x}}$$
$$= \sum_{n=0} A_n^M(\vec{p}) \left(e^{-E_{p,n}^M t} + e^{-E_{p,n}^M (N_t - t)} \right)$$

N_t は時間方向の格子サイズ

フィットの関数はこれに合わせて、 $\sum_{n=0}^{n=N} A_n^M(\vec{p}) \left(e^{-E_{p,n}^M t} + e^{-E_{p,n}^M (N_t - t)} \right)$

今は $N = 0, 1$ で解析

E は 3点関数とかのフィットに使う

A は 行列要素を抜き出す時に使う

相関関数の解析

有効質量

$$\frac{C_2^M(t-1, \vec{p}) + C_2^M(t+1, \vec{p})}{2C_2^M(t, \vec{p})} \cong \cosh(E_p^M)$$

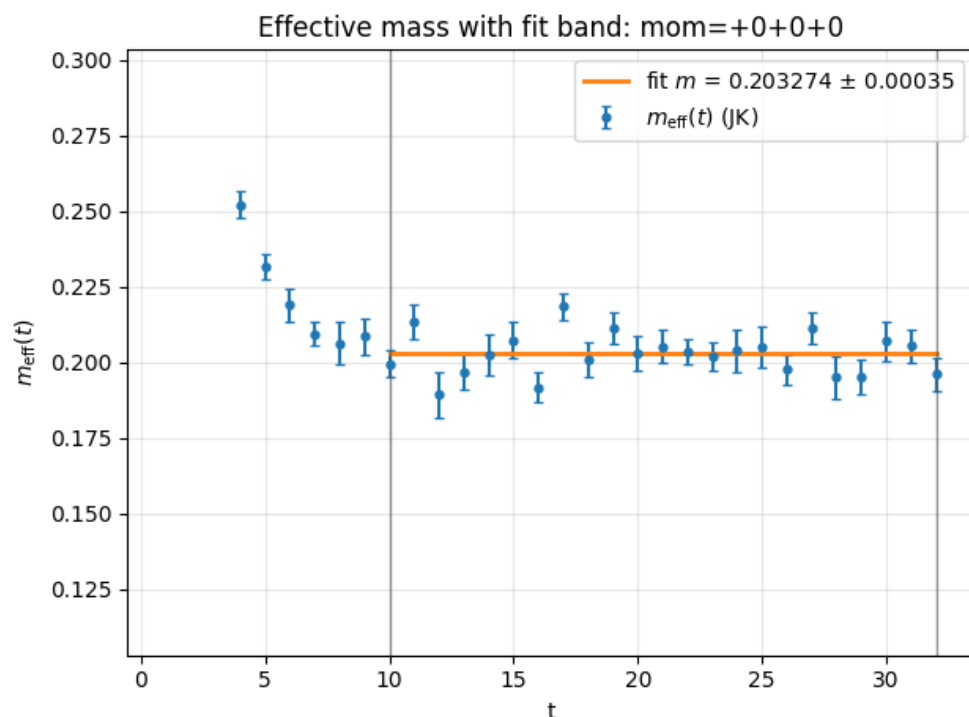
←時間依存消える（基底状態だけの近似）

$E_p^M(t)$ ：有効質量（各時刻で計算）

←有効質量が一定になる範囲では基底が支配的

N=0のフィットはこの範囲で行う
→基底状態に関する質量を抽出できる！

$$E_0^\pi \cong 0.2032(4) \rightarrow 498.4 \pm 1.0[\text{MeV}]$$



相関関数の解析

(時間的) 3点関数 :

$$C_{3,\mu}^{K \rightarrow B_s}(t, T, \vec{p}) = \sum_{x,y} \langle 0 | O_{B_s}(\vec{x}, T) (\bar{u} \gamma_\mu b)(\vec{y}, t) O_K^\dagger(\vec{0}, 0) | 0 \rangle e^{-i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})}$$
$$= \sum_{n,m} \sqrt{A_n^K(\vec{p})} \sqrt{A_m^{B_s}(\vec{0})} \frac{\langle B_{sm}(\vec{0}) | (\bar{u} \gamma_\mu b)(\vec{q}, t) | K_n(\vec{p}_K) \rangle}{\sqrt{4E_{p,n}^K E_{0,m}^{B_s}}} e^{-E_{p,n}^K t} e^{-E_{0,m}^{B_s}(T-t)}$$

Tは B_s の挿入時間

↑ 崩壊率に関する行列要素

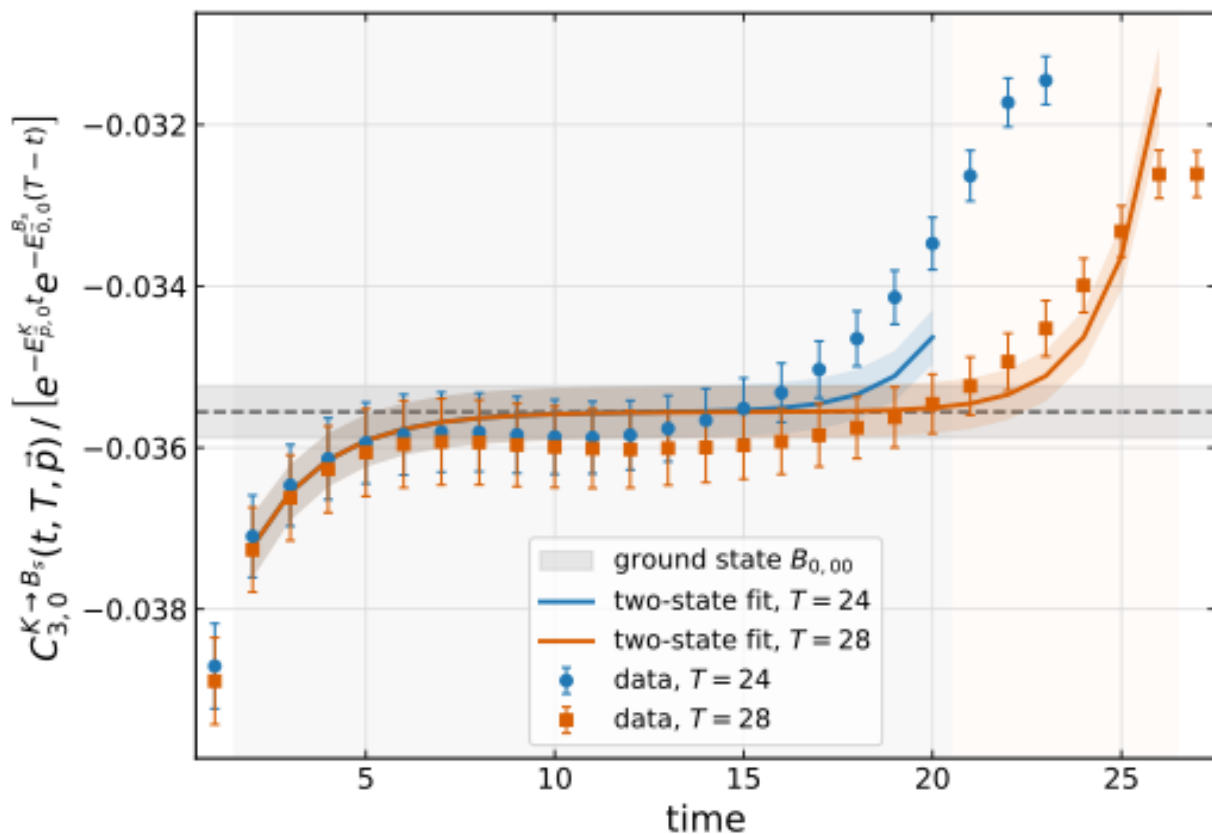
フィットの関数はこれに合わせて、

$$B_{\mu,00} e^{-E_{p,0}^K t} e^{-E_{0,0}^{B_s}(T-t)} + B_{\mu,10} e^{-E_{p,1}^K t} e^{-E_{0,0}^{B_s}(T-t)} + B_{\mu,01} e^{-E_{p,0}^K t} e^{-E_{0,1}^{B_s}(T-t)}$$

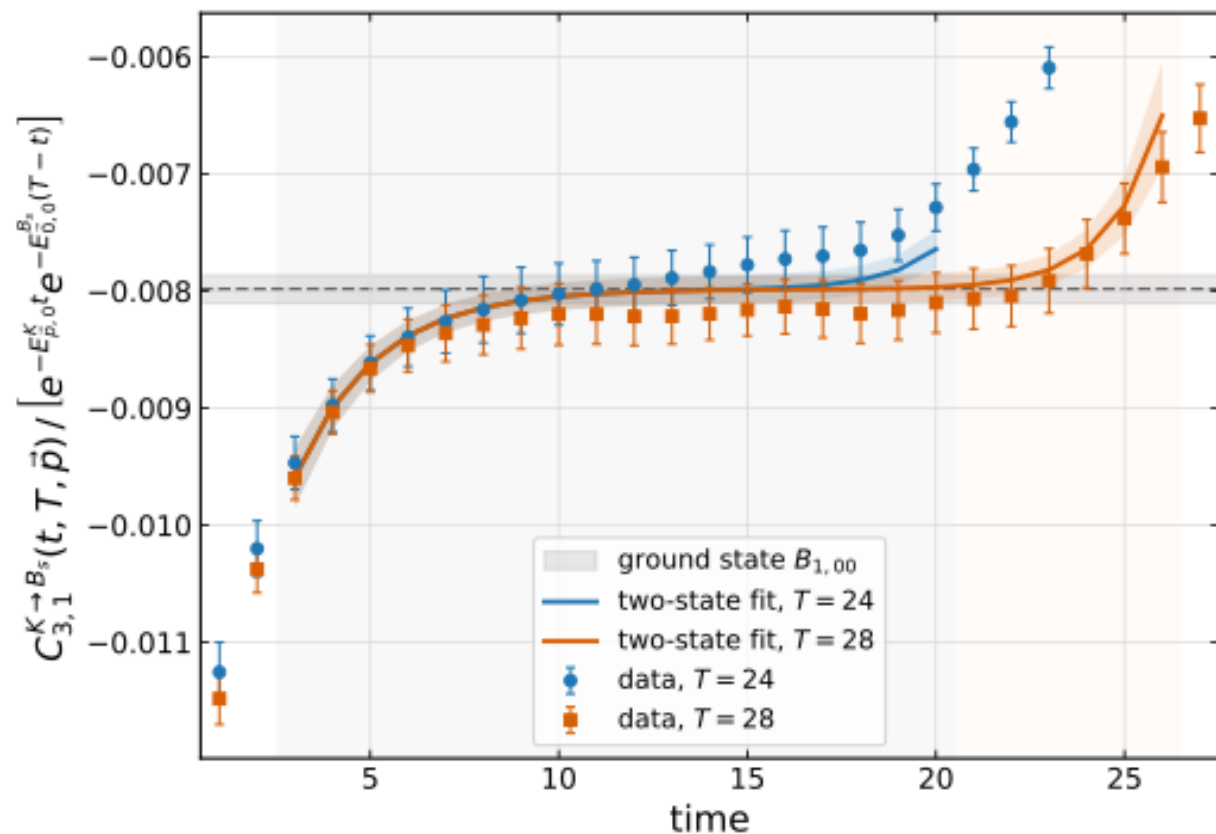
Eは2点関数のフィットの結果を代入しておく

Aは2点関数の結果があるので $B_{\mu,00}$ とE,Aのかけ算、割り算で行列要素を計算

相関関数の解析



$$C_{3,0}^{K \rightarrow B_s}(t, T, \vec{0}) / e^{-E_{p,0}^K t} e^{-E_{0,0}^{B_s}(T-t)}$$



$$C_{3,1}^{K \rightarrow B_s}(t, T, (1,0,0)) / e^{-E_{p,0}^K t} e^{-E_{0,0}^{B_s}(T-t)}$$

基底状態の時間依存性で3点関数を割ったもの → 端の方は励起の寄与大

相関関数の解析

行列要素を形状因子で分解

$$\langle K(\vec{p}_K) | (\bar{u} \gamma_\mu b) (\vec{0}, 0) | B_s(\vec{p}_B) \rangle = \sqrt{2M_{B_s}} \left(v_\mu f_\parallel(q^2) + (p_K - (p_K \cdot v)v)_\mu f_\perp(q^2) \right)$$

$\vec{p}_B = \vec{0}$ の時、時間方向と空間方向で分かれる

$$v_\mu = \frac{p_{B\mu}}{M_{B_s}}, q_\mu = (p_B - p_K)_\mu$$

$$f_\parallel(q^2) = \frac{\langle K(\vec{p}_K) | (\bar{b} \gamma_0 u) (\vec{0}, 0) | B_s(\vec{p}_B) \rangle}{\sqrt{2M_{B_s}}}$$

→この量を求める

$$f_\perp(q^2) = \frac{\langle K(\vec{p}_K) | (\bar{b} \gamma_i u) (\vec{0}, 0) | B_s(\vec{p}_B) \rangle}{p_{K_i} \sqrt{2M_{B_s}}}$$

3点関数のフィット
相関関数の比をフィット (次から)

相関関数の解析

3点関数を直接フィットするのではなく相関関数の比を作ってフィットする方法

時間依存性をキャンセルする比 (Double Ratio)

$$R_D = \frac{C_{3,0}^{B_s \rightarrow K}(t, T, \vec{0}) C_{3,0}^{K \rightarrow B_s}(t, T, \vec{0})}{C_{3,0}^{B_s \rightarrow B_s}(t, T, \vec{0}) C_{3,0}^{K \rightarrow K}(t, T, \vec{0})} \sim \frac{1}{2E_0^K} \frac{|\langle K(\vec{0}) | (\bar{u} \gamma_0 b)(\vec{0}, 0) | B_s(\vec{0}) \rangle|^2}{2E_0^{B_s}}$$

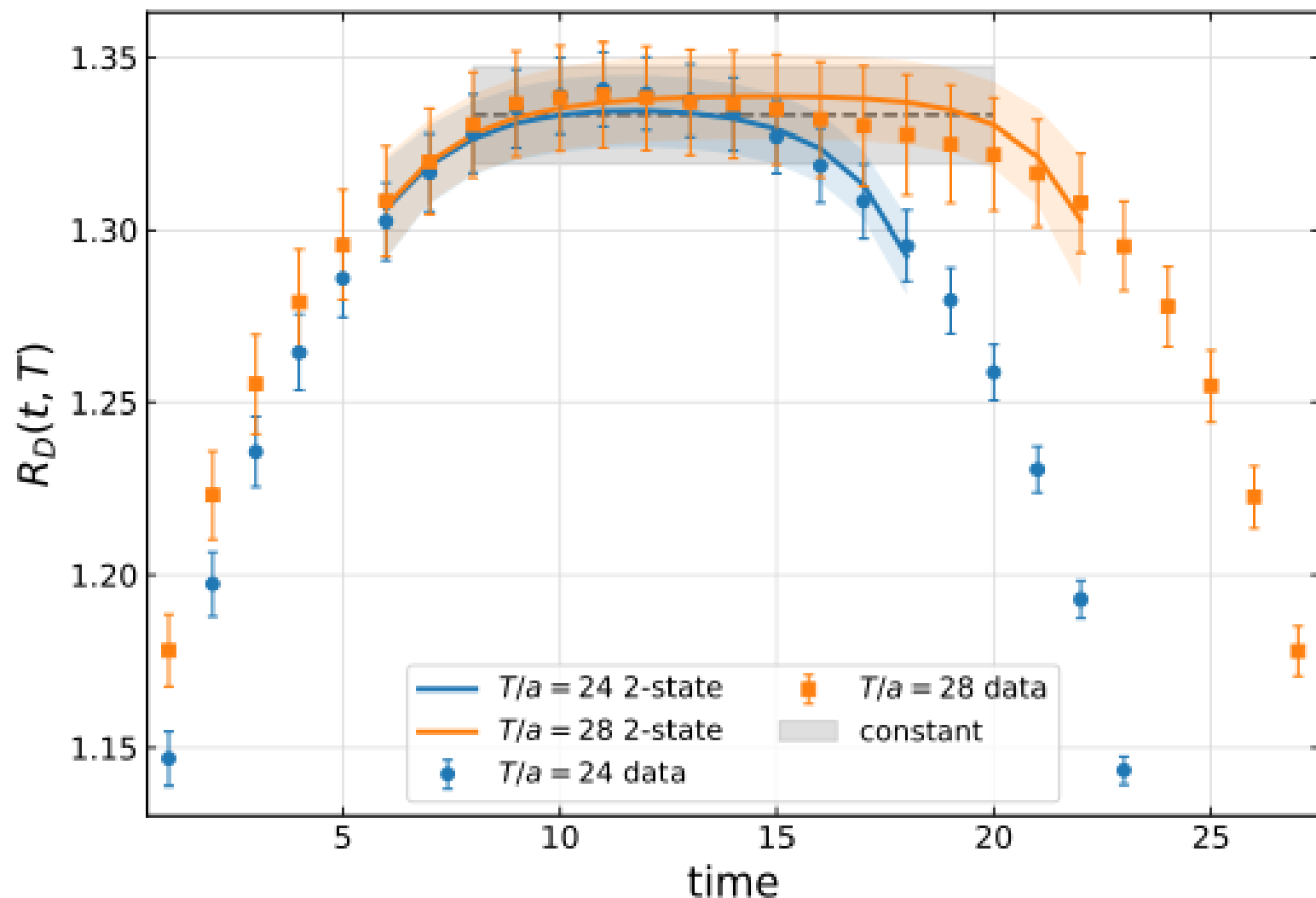
$$f_{\parallel}(q_{max}^2) = \sqrt{2E_0^K R_D}$$

で最大運動量遷移での形状因子を抽出

フィットの関数は、 $D(1 + E(e^{-\Delta E_{0,0}^K t} + e^{-\Delta E_{0,0}^K (T-t)}) + F(e^{-\Delta E_{0,0}^{B_s} t} + e^{-\Delta E_{0,0}^{B_s} (T-t)}))$

Dと E_0^{K, B_s} などで行列要素を計算できる

相関関数の解析



中央あたりは励起の寄与が少なく、
定数フィットも行ってみた
(T が十分大きい必要がある)

今の主な結果は $T=24, 28$ での
同時フィット
(フィットのパラメータ数は3個)

相関関数の解析

時間依存性をキャンセルする比 (R_0)

$$R_0(\vec{p}) = \frac{C_{3,0}^{K \rightarrow B_s}(t, T, \vec{p})}{C_2^K(T-t, \vec{p})} \frac{C_2^K(T-t, \vec{0})}{C_{3,0}^{K \rightarrow B_s}(t, T, \vec{0})} \sim \frac{f_{\parallel}(q^2)}{f_{\parallel}(q_{max}^2)} \sqrt{\frac{A_0^K(\vec{0}) M_K}{A_0^K(\vec{p}) E_K(\vec{p})}}$$

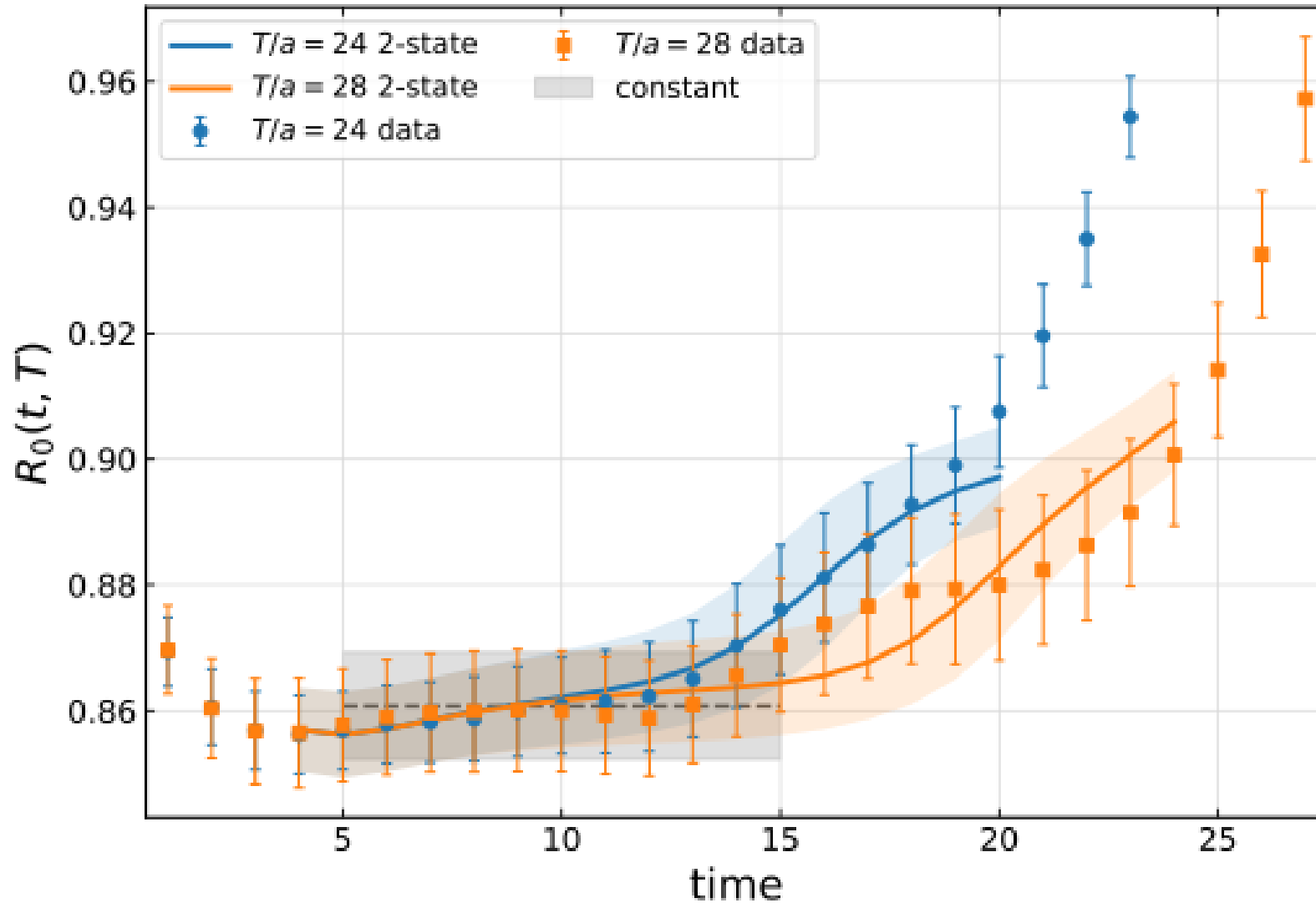
$$f_{\parallel}(q^2) = R_0(\vec{p}) f_{\parallel}(q_{max}^2) / \sqrt{\dots}$$

で形状因子を抽出

フィットの関数は、 $G \left(1 + H e^{-\Delta E_{p,0}^K t} + I e^{-\Delta E_{0,0}^{B_s}(T-t)} \right)$

Gと $\vec{p} = (0,0,0)$ での $f_{\parallel}$ から形状因子を計算できる

相関関数の解析



これも一部で定数らしく見える
→この範囲で定数フィット

主な結果は $T=24, 28$ での
同時フィット
(フィットのパラメータ数は3個)

相関関数の解析

時間依存性をキャンセルする比 (R_i)

$$R_i(\vec{p}) = \frac{C_{3,i}^{K \rightarrow B_s}(t, T, \vec{p})}{C_{3,0}^{K \rightarrow B_s}(t, T, \vec{p})} \sim \textcolor{red}{f}_\perp(q^2) \frac{p_i}{f_\parallel(q^2)}$$

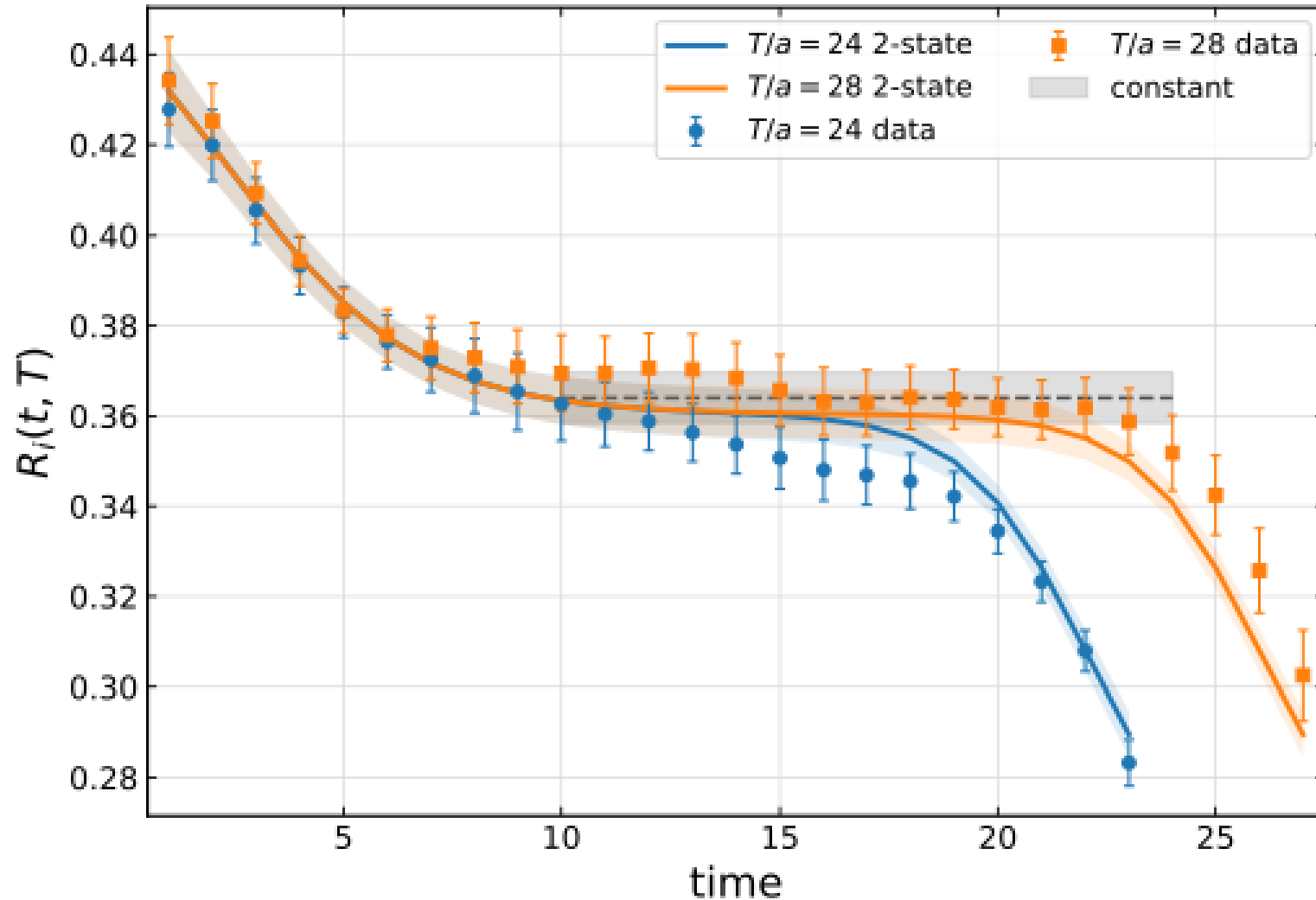
$$f_\perp(q^2) = R_i(\vec{p}) \frac{f_\parallel(q^2)}{p_i}$$

で形状因子を抽出

フィットの関数は、 $\textcolor{red}{J} \left(1 + \textcolor{red}{K} e^{-\Delta E_{p,0}^K t} + \textcolor{red}{L} e^{-\Delta E_{0,0}^{B_s}(T-t)} \right)$

Jと $\vec{p}$ での $f_\parallel$ から形状因子 $f_\perp$ を計算できる

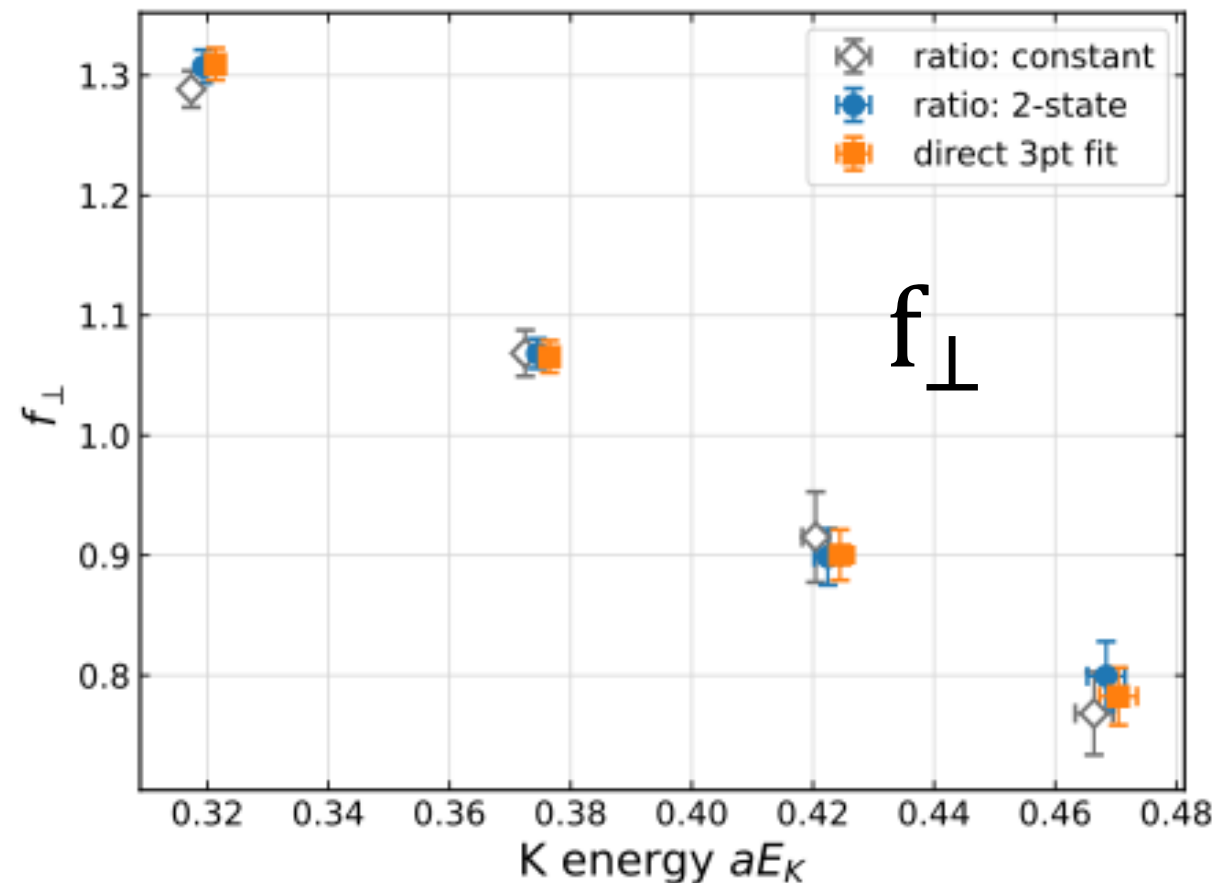
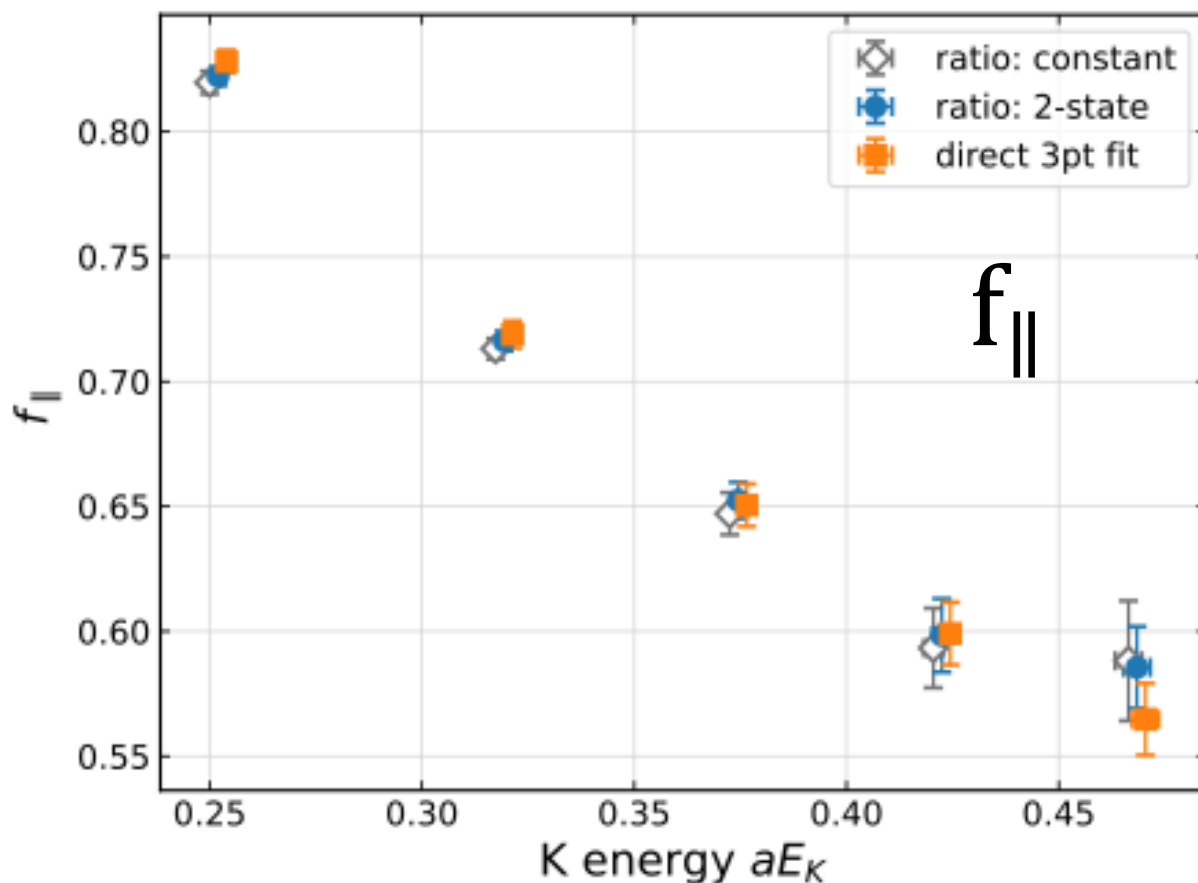
相関関数の解析



これも一部で定数らしく見える
→この範囲で定数フィット

主な結果は $T=24, 28$ での
同時フィット
(フィットのパラメータ数は3個)

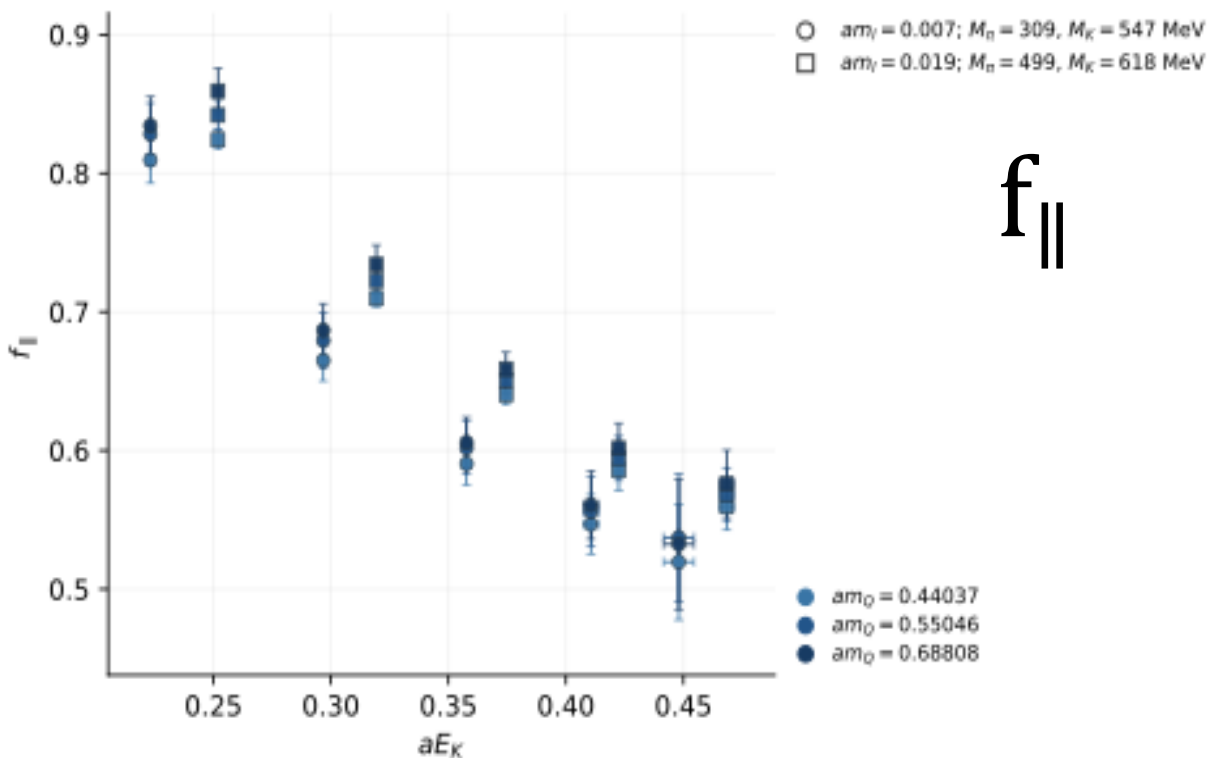
形状因子の結果 ($a^{-1} \cong 2.453[\text{GeV}]$, $am_Q = 0.44037$)



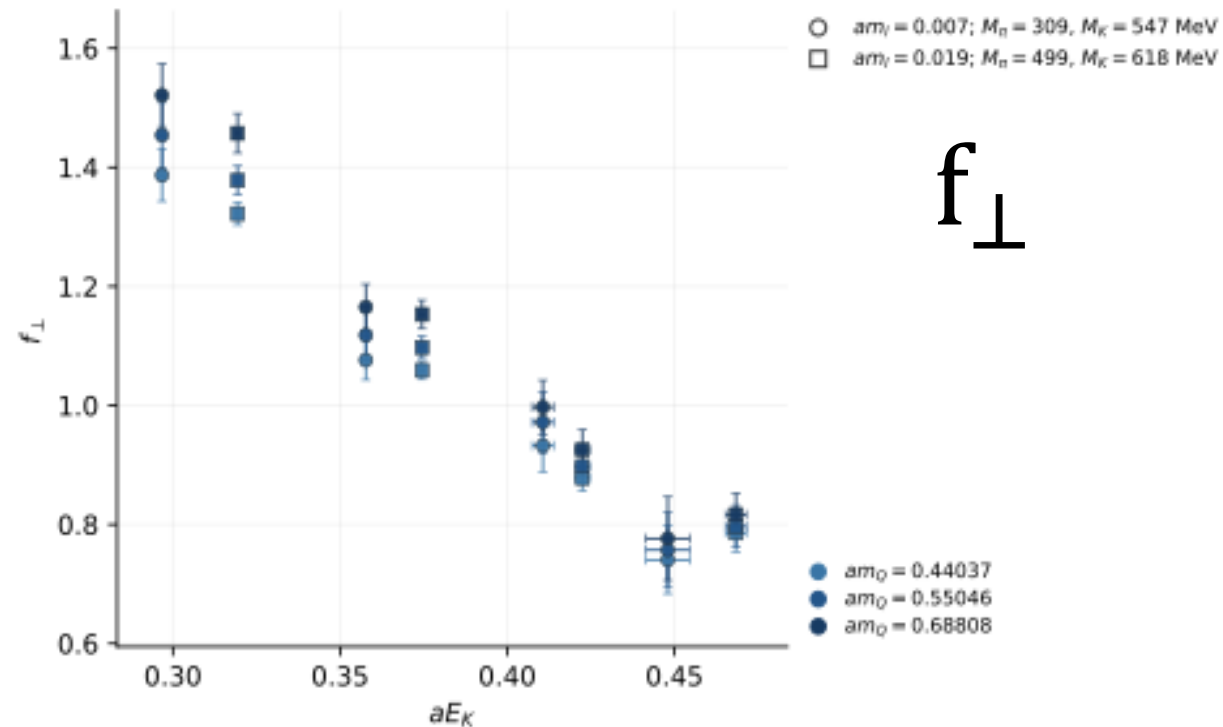
3点関数のフィット、比のフィット（定数、励起の寄与ありの2種類）の結果の比較
全ての結果は 1σ 以内で整合している

形状因子の結果 ($a^{-1} \cong 2.453[\text{GeV}]$)

$\beta = 4.17, a^{-1} = 2.453 \text{ GeV}$

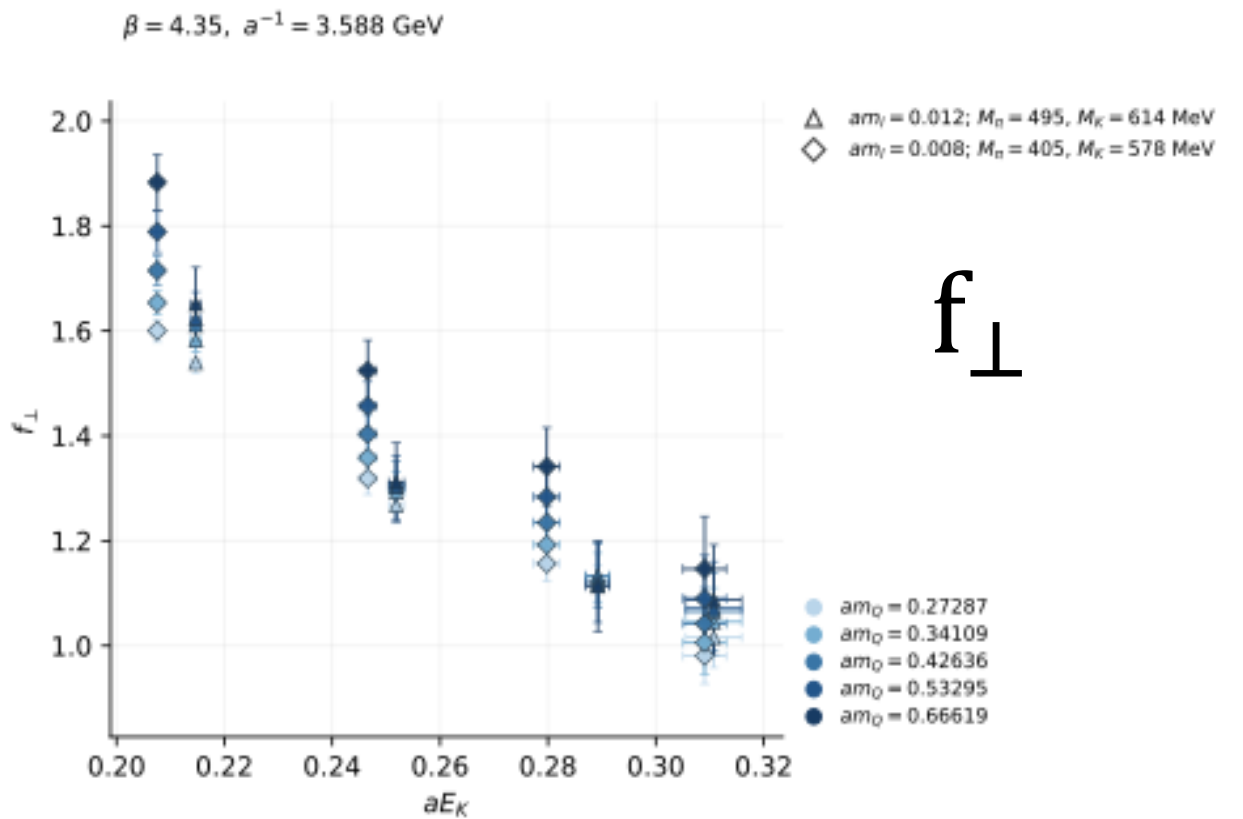
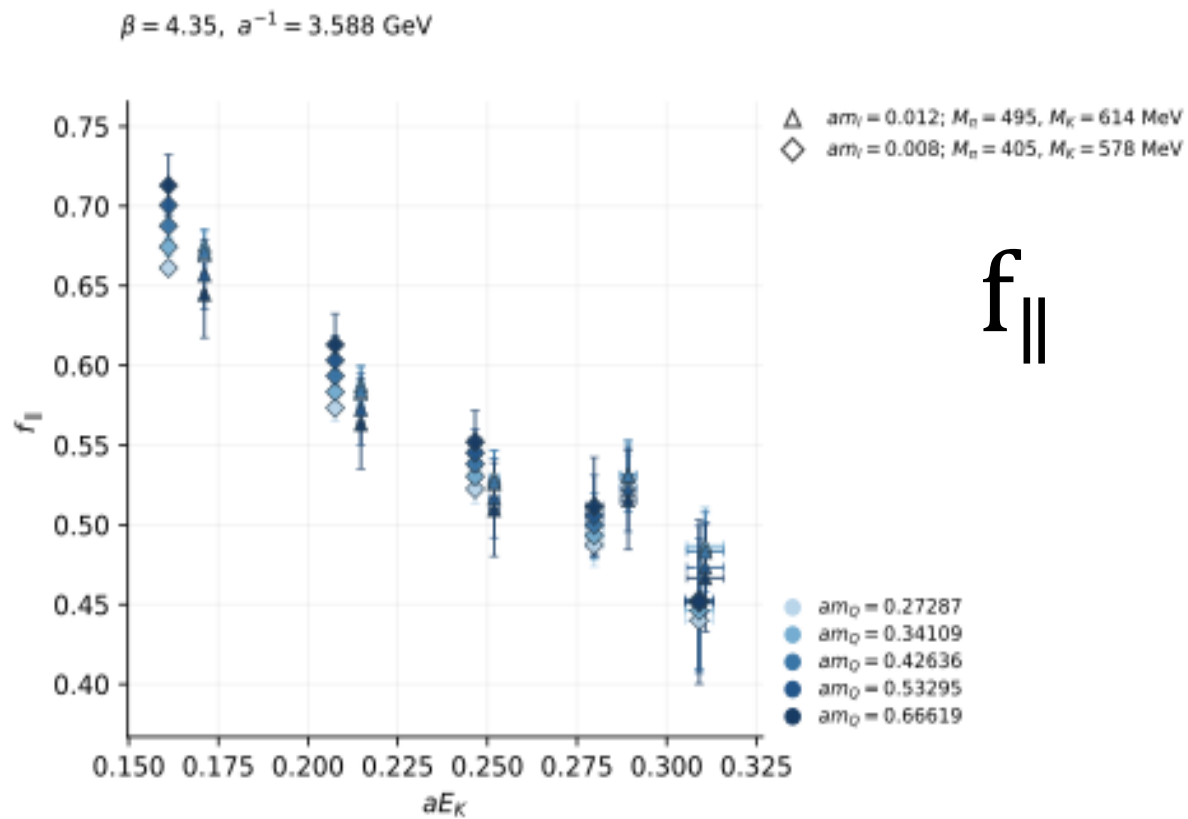


$\beta = 4.17, a^{-1} = 2.453 \text{ GeV}$



am_Q, am_l それぞれの傾向が $f_{||}, f_{\perp}$ で緩やかに見られる

形状因子の結果 ($a^{-1} \cong 3.588[\text{GeV}]$)



am_Q, am_l それぞれの傾向が $f_{\parallel}, f_{\perp}$ で緩やかに見られる

目次

- 研究背景と動機(レビュー)
- 格子設定と解析結果
- まとめと今後の課題

まとめと今後

- ・ 最終目標は格子計算を用いたCKM行列要素 $|V_{ub}|$ の決定
 - ・ 現在の目標はJLQCDの計算結果を他の格子グループと比較
 - ・ 2つの格子間隔、複数のbクォーク質量での形状因子を得られた
 - ・ フィットの方法による違いは 1σ 以内で整合していた
-
- * 他のパラメータでの計算をして物理点への外挿
 - * 外挿後、得られた形状因子を全運動量遷移へ外挿 (z展開)

別表示の形状因子の定義と変換

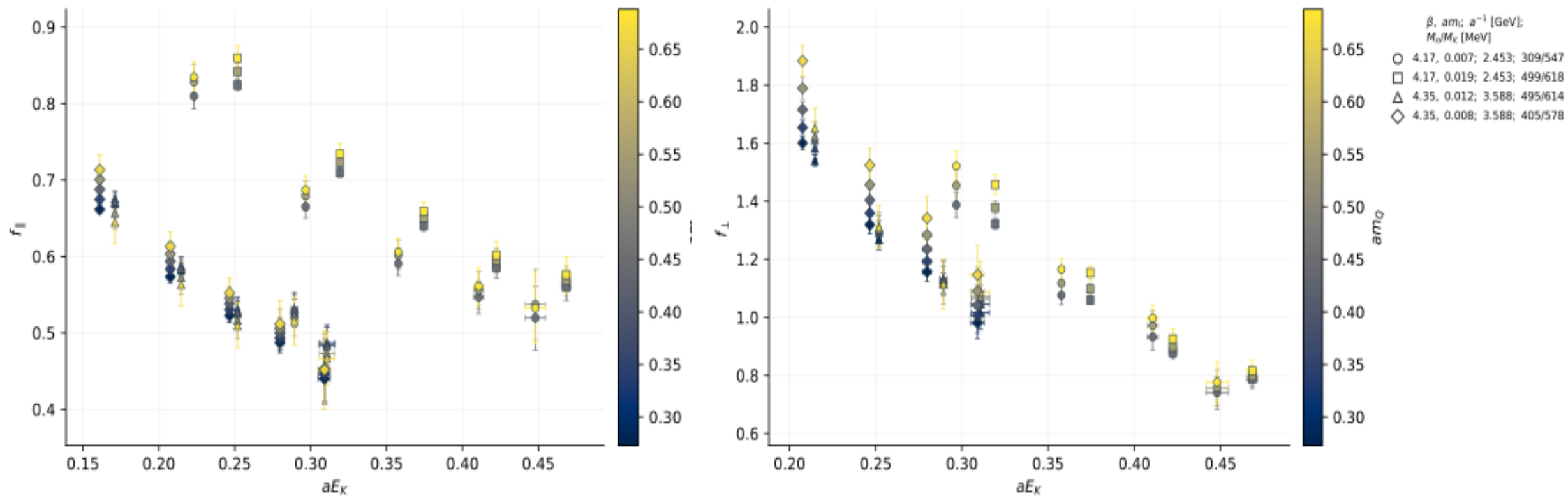
$$\begin{aligned} & \langle K(\vec{p}_K) | (\bar{u} \gamma_\mu b) (\vec{0}, 0) | B_s(\vec{p}_B) \rangle \\ &= \left(p_B + p_K - \frac{M_{B_s}^2 - M_K^2}{q^2} q \right)_\mu f_+(q^2) + \left(\frac{M_{B_s}^2 - M_K^2}{q^2} q \right)_\mu f_0(q^2) \end{aligned}$$

定義から $f_+(0) = f_0(0)$ となる（この条件はz展開の際に使う）

$$f_+(q^2) = \frac{1}{\sqrt{2M_{B_s}}} \left(f_{\parallel}(q^2) + (M_{B_s} - E_K) f_{\perp}(q^2) \right)$$

$$f_0(q^2) = \frac{\sqrt{2M_{B_s}}}{M_{B_s}^2 - M_K^2} \left((M_{B_s} - E_K) f_{\parallel}(q^2) + (E_K^2 - M_K^2) f_{\perp}(q^2) \right)$$

形状因子の結果



RBC/UKQCDとの比較

○ $\beta = 4.17, am_l = 0.007; M_\pi = 309 \text{ MeV}$ ◇ $\beta = 4.35, am_l = 0.008; M_\pi = 405 \text{ MeV}$ ◇ RBC/UKQCD 2023 (physical limit)
□ $\beta = 4.17, am_l = 0.019; M_\pi = 499 \text{ MeV}$ △ $\beta = 4.35, am_l = 0.012; M_\pi = 495 \text{ MeV}$

