

# ラゲールガウシアン光子とエルミートガウシアン光子のコンプトン散乱

量研・LCSガンマ線プロジェクト  
(羽島グループ)

早川岳人

L. Allen, et al. Phys. Rev. A, 45, 8185 (1992)

Laguerre-Gaussian mode の光は、同軸近似においてヘルムホイツ方程式の解。

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} &= \mathbf{x}u(x,y,z)e^{-ikz} \\
 u_{pl}(r,\phi,z) &= \frac{C}{(1+z^2/z_R^2)^{1/2}} \left[ \frac{r\sqrt{2}}{w(z)} \right]^l L_p^l \left[ \frac{2r^2}{w^2(z)} \right] \\
 &\times \exp \left[ \frac{-r^2}{w^2(z)} \right] \exp \frac{-ikr^2z}{2(z^2+z_R^2)} \exp(-il\phi) \\
 &\times \exp \left[ i(2p+l+1)\tan^{-1} \frac{z}{z_R} \right],
 \end{aligned}$$



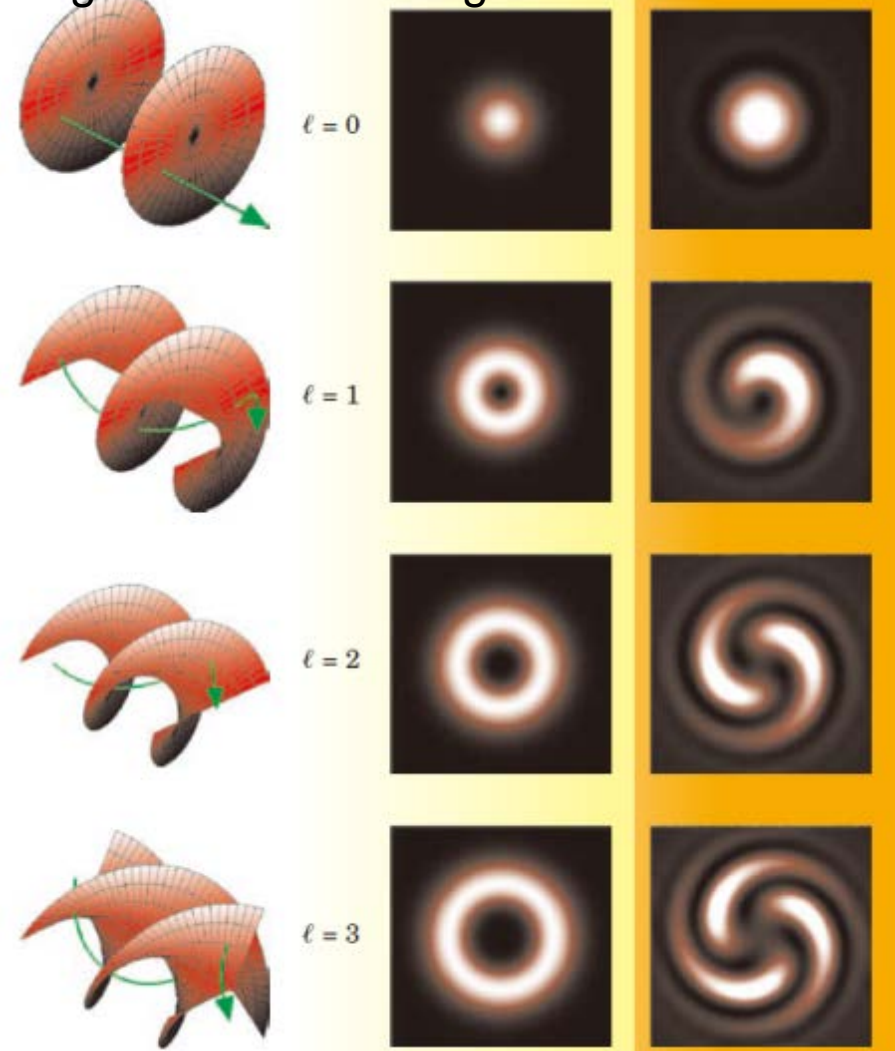
エネルギーと角運動量の比を求めた。

$$L/cP = l/\omega$$

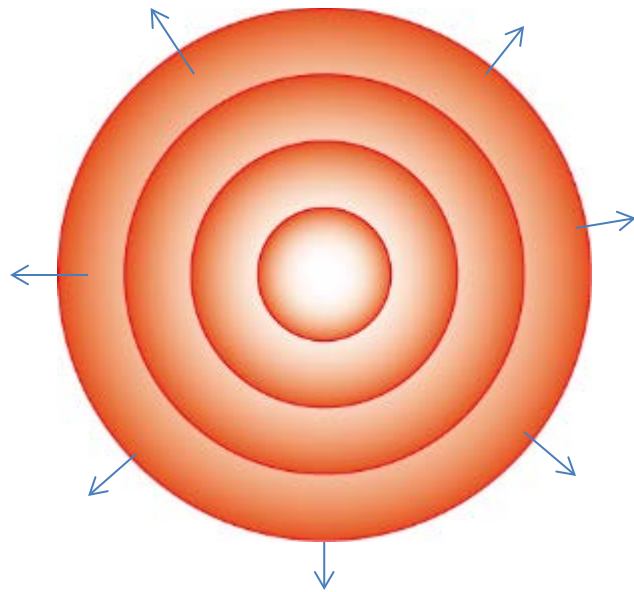


量子力学と光学のアナロジーから、この結果は個々の光子が  $l\hbar$  の角運動量を持つことに対応することを指摘した。

Laguerre-Gaussian light

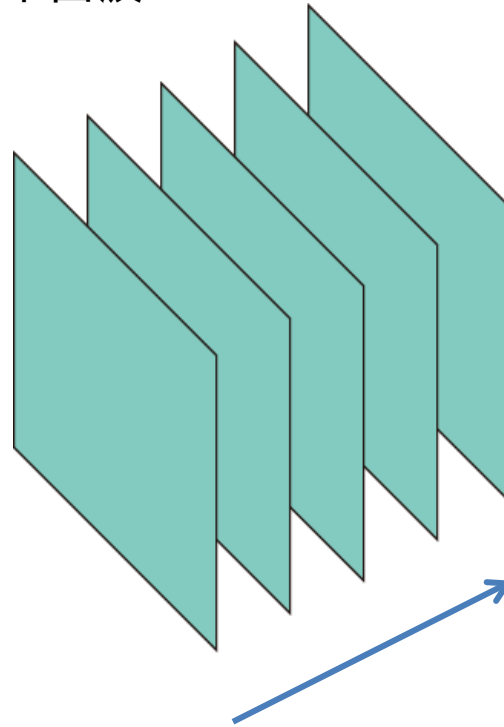


球面波



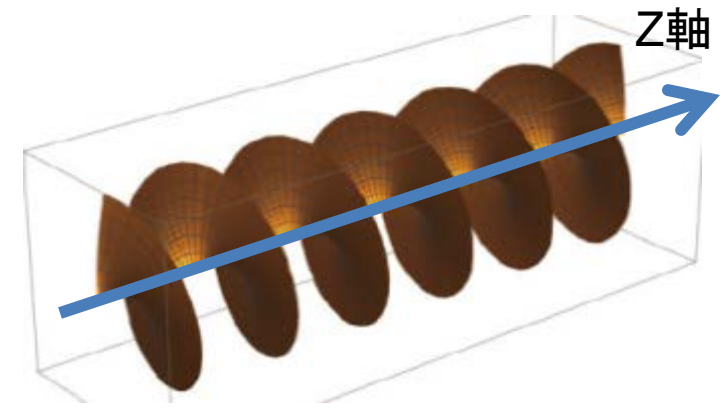
角運動量の固有状態

平面波



運動量の固有状態

ラゲールガウシアン波



軌道角運動量のZ軸への射影成分の固有状態

自由空間の光の波動方程式

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

同軸近似

$$\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \ll k \frac{\partial A}{\partial z}$$

発散角度が非常に小さい。  
ほとんど平行ビーム

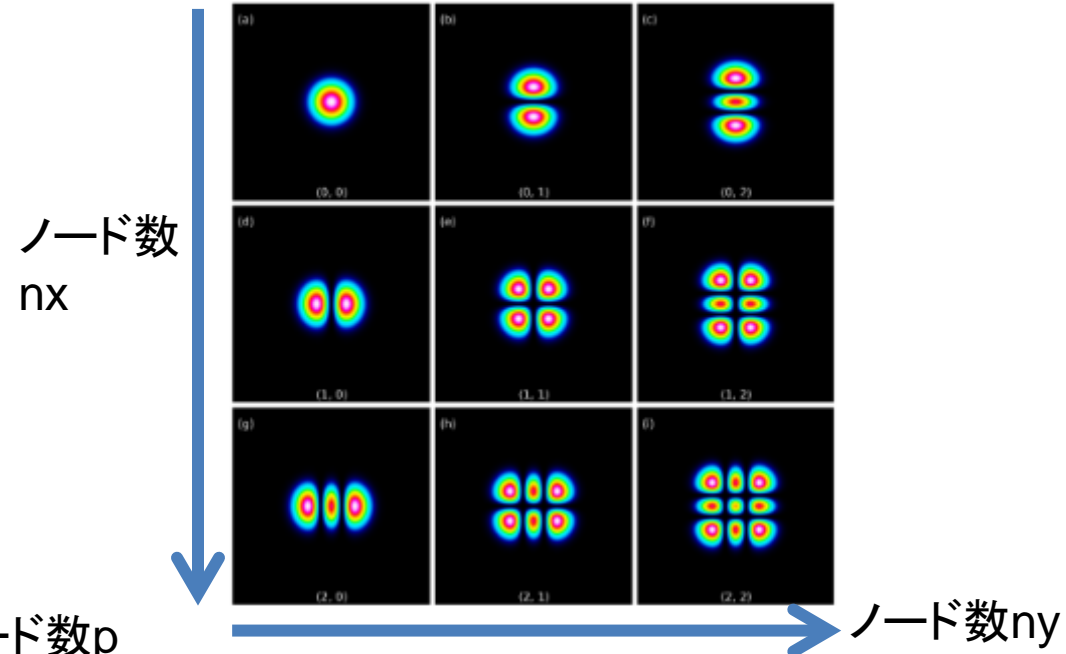
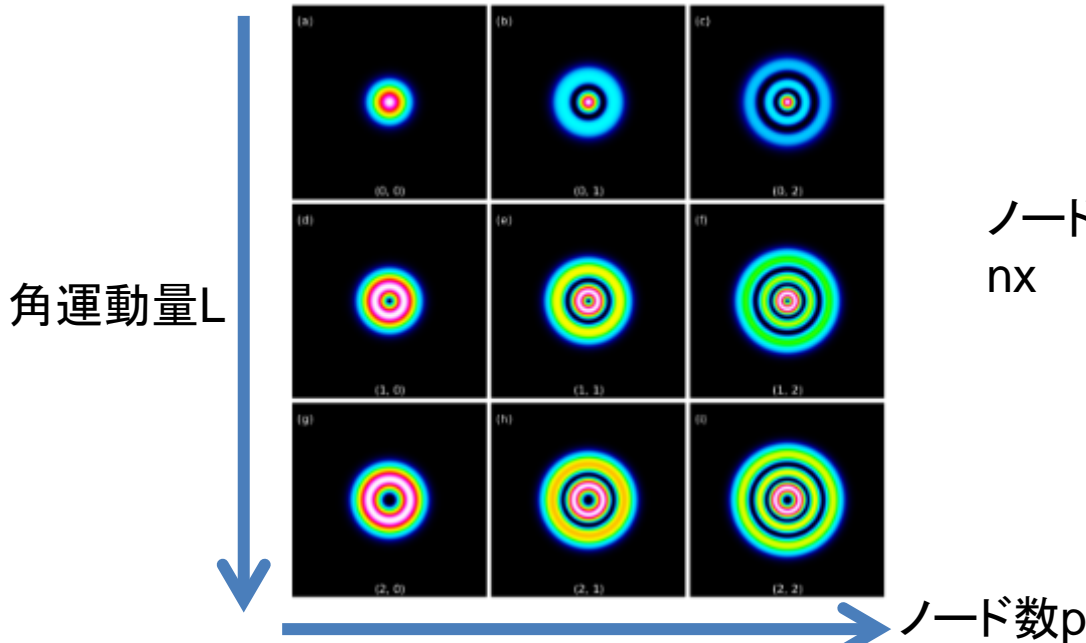
同軸近似の場合の波動方程式

$$\left( \nabla_T^2 + 2ik \frac{\partial}{\partial z} \right) u = 0$$

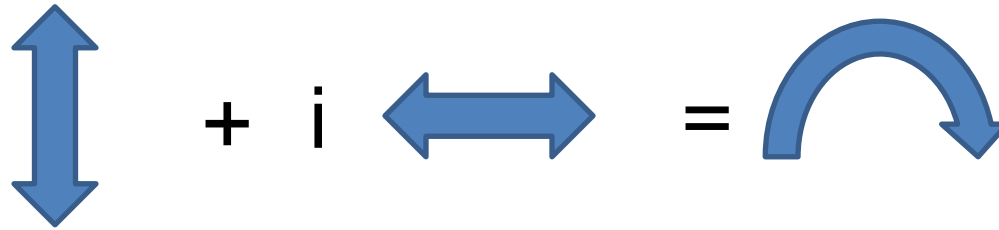
<https://www.dataray.com/blog-m2-high-order-modes.html>

円筒座標系：ラゲールガウシアン

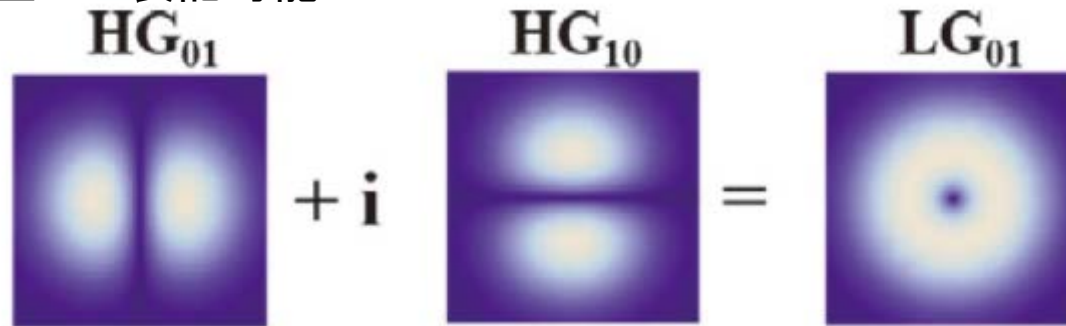
直交座標系：エルミートガウシアン



円偏光と直線偏光は互いに表記可能



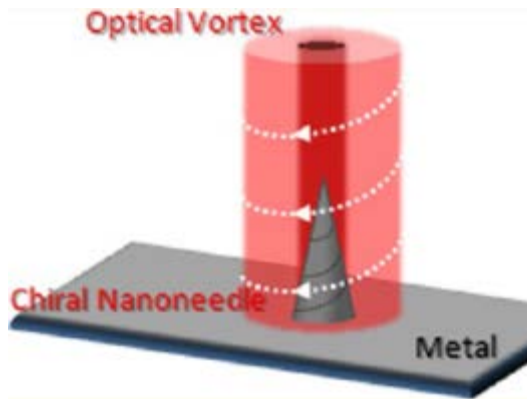
エルミートガウシアン波動関数と、ラゲールガウシアンもお互いに表記可能



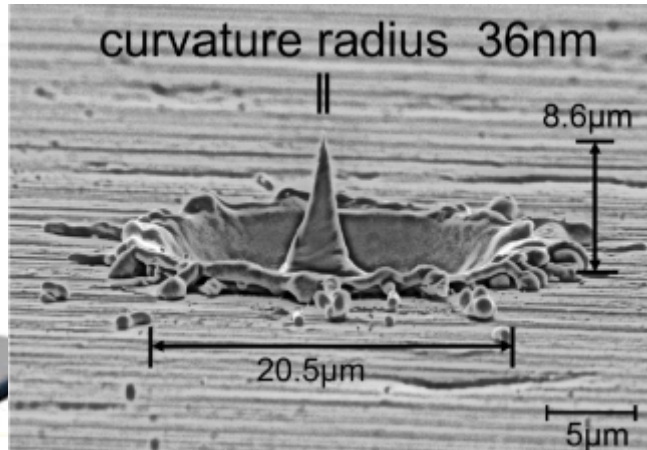
吉村信次, 荒巻光利

J. Plasma Fusion Res. Vol.94, No.3 (2018)121

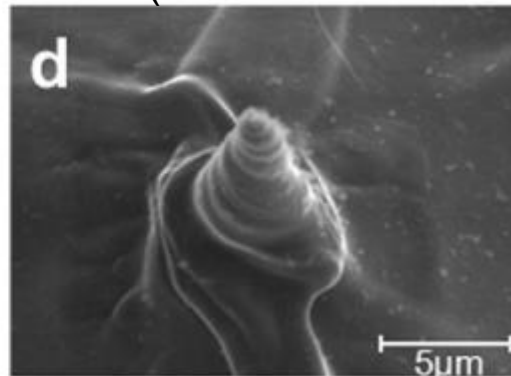
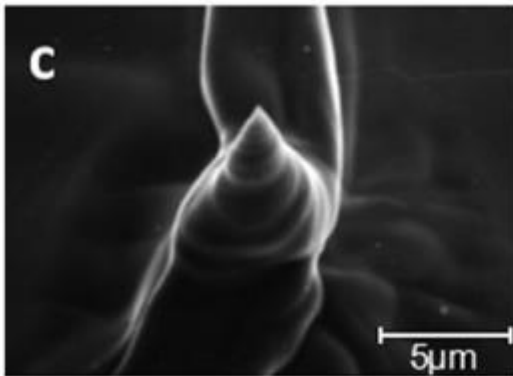
エルミートガウシアンも、顕わではないが角運動量に対して制限を持つ。  
高い角運動量を持つ条件がある。



$J = -2$  (clockwise)



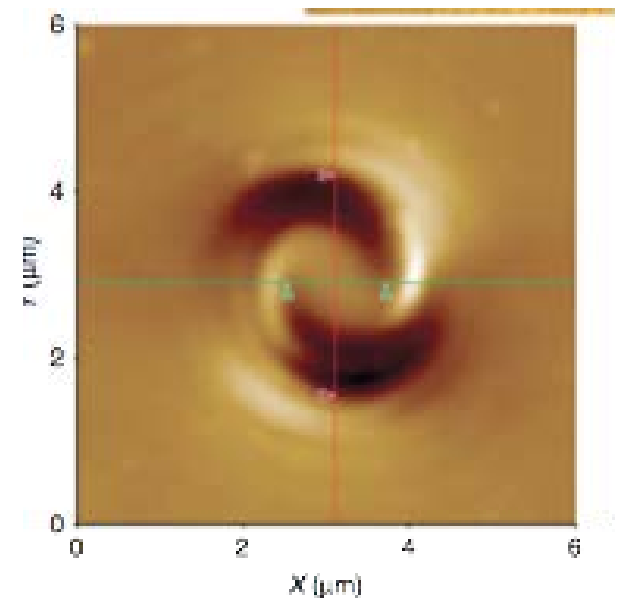
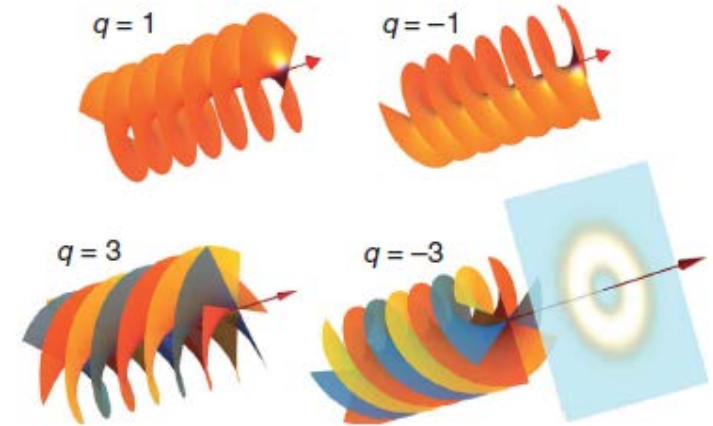
$J = 2$  (counter-clockwise)



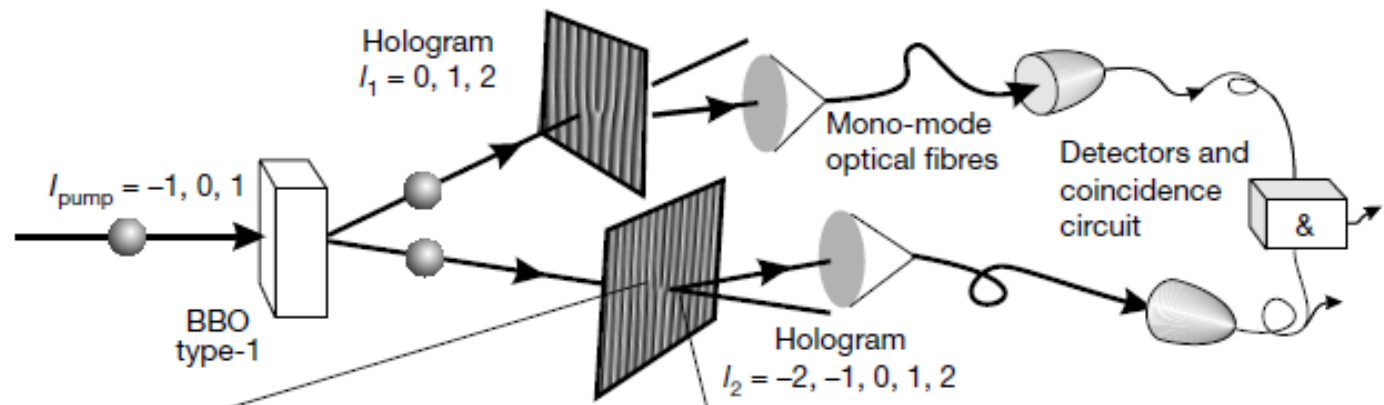
Tantalum target

Using Optical Vortex To Control the Chirality of Twisted Metal Nanostructures  
K. Toyoda et al. Nano Lett. 12, 3645 (2012).

Irradiation on azo-polymer films  
A. Ambrosio, Nat. Comm. 2012

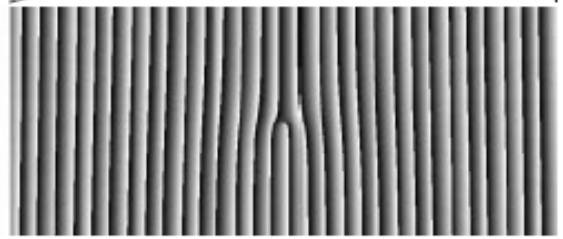


# Coincidence measurements of two diffracted photons divided from photon vortex



Entanglement of the orbital angular momentum states of photons

A. Mair et al. Nature, 412, 313 (2001).

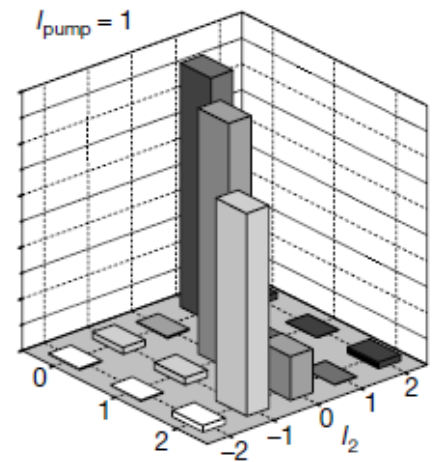
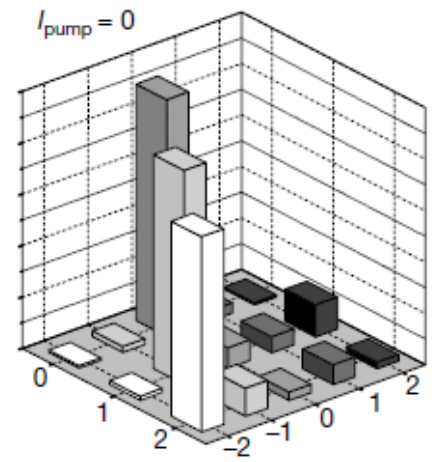
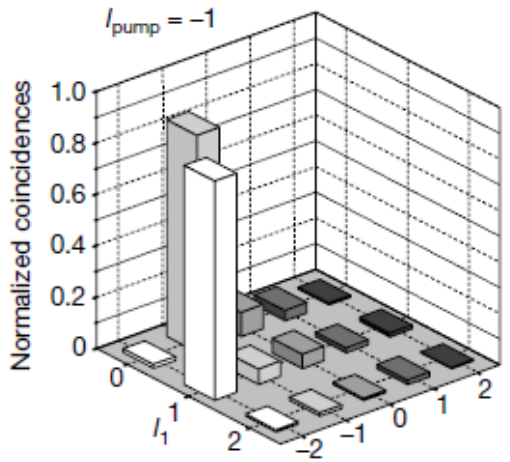


Angular momentum of photon is measured using diffraction with hologram

$l = -1$

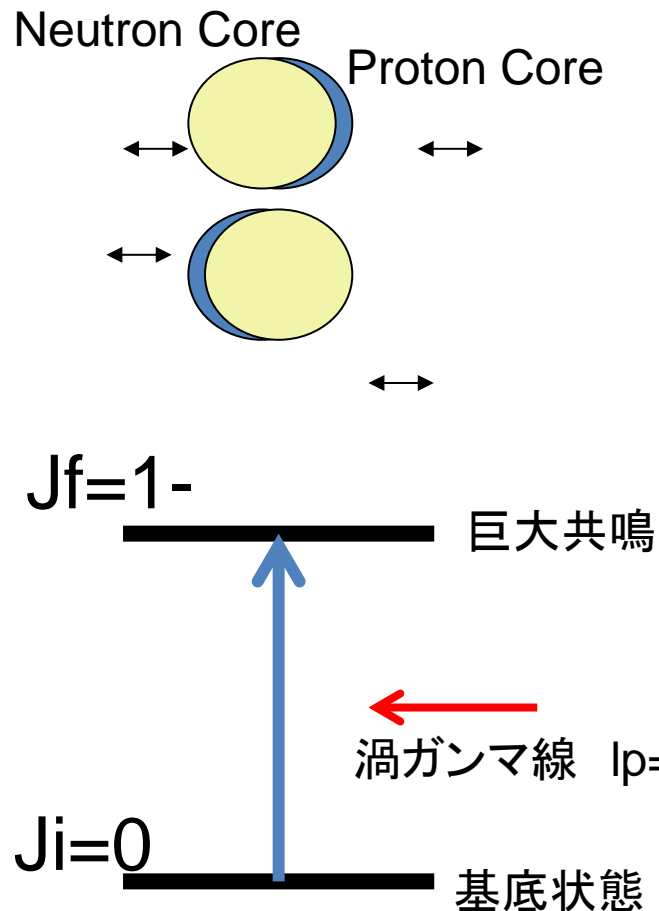
$l = 0$

$l = 1$



Result shows that the sum of angular momentum is conserved.

# 渦ガンマ線によるGDRの禁止



巨大共鳴 (Giant Dipole Resonance) は、陽子を除く、ほぼ全ての原子核で観測されている普遍的な現象

角運動量保存則

$$| J_i - l_p | \leq J_f \leq | J_i + l_p |$$

入射したガンマ線の全角運動量が2以上ならば、GDRの励起は禁止される。

渦ガンマ線では、GDRが禁止されるはず。

渦ガンマ線 ( $l_p$  が2以上) が主なガンマ線の場合、光核反応が原則禁止される。

Y. Taira, T. Hayakawa, M. Katoh, Scientific Reports, 7, 5018 (2017).



1個の光子がラゲールガウシアン  
の波動関数を持ちうるのか？

ガンマ線領域で渦光を作れば、既存の実験手法で検証可能では。

U. D. Jentschura, V. G. Serbo  
PRL 106, 013001 (2011)

## 渦ガンマ線の生成法

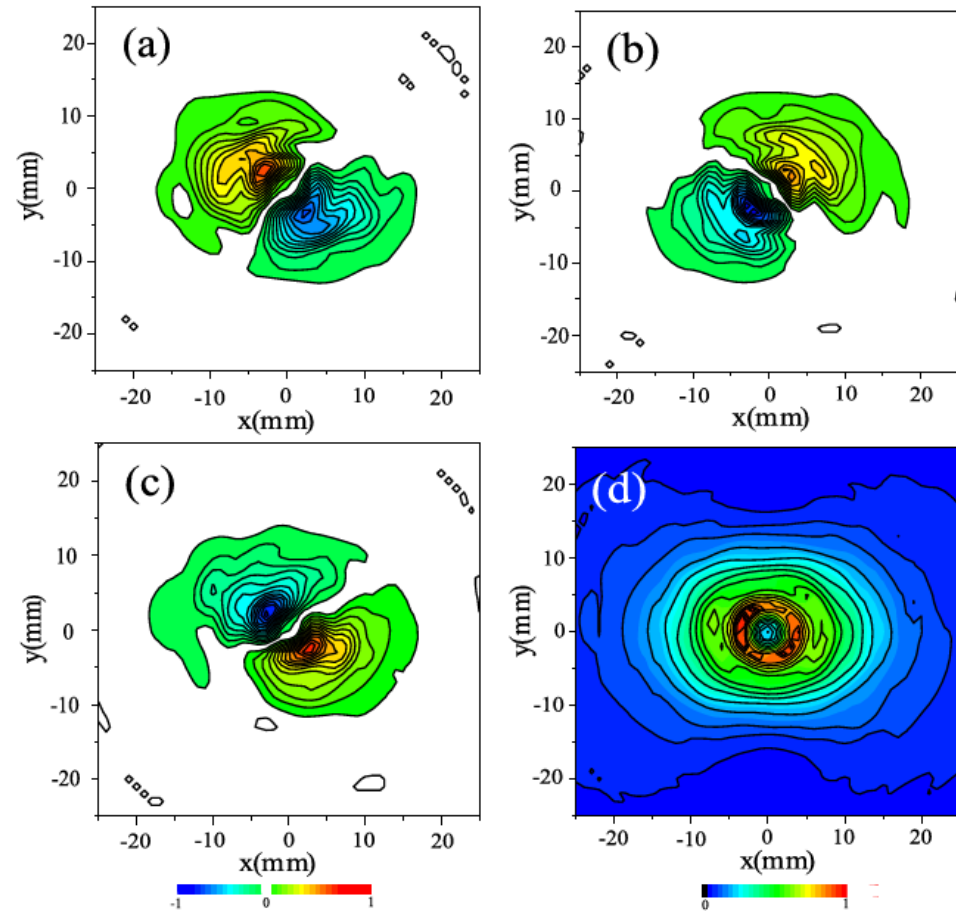
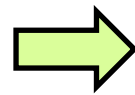
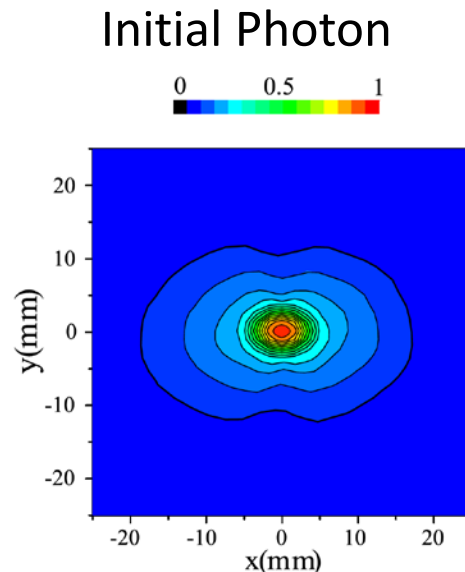
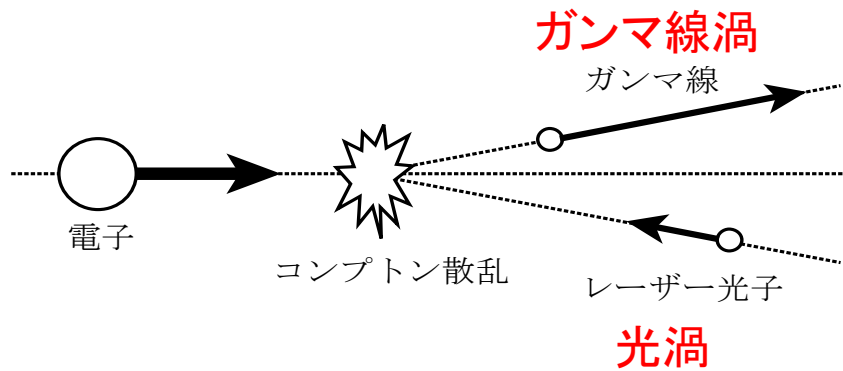
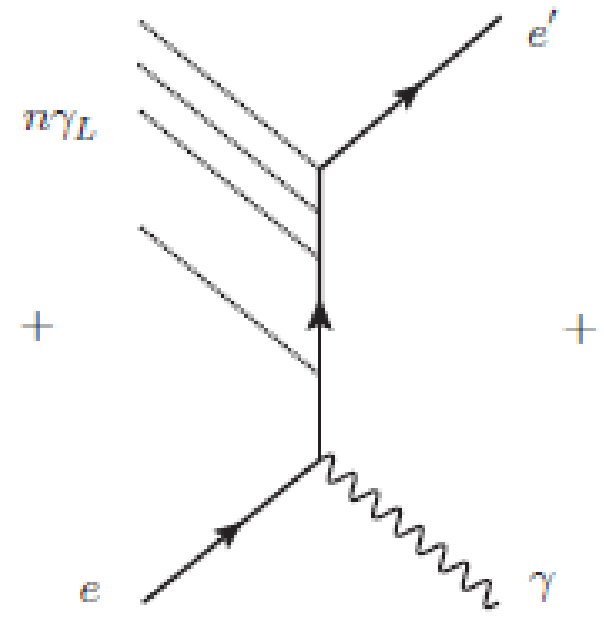
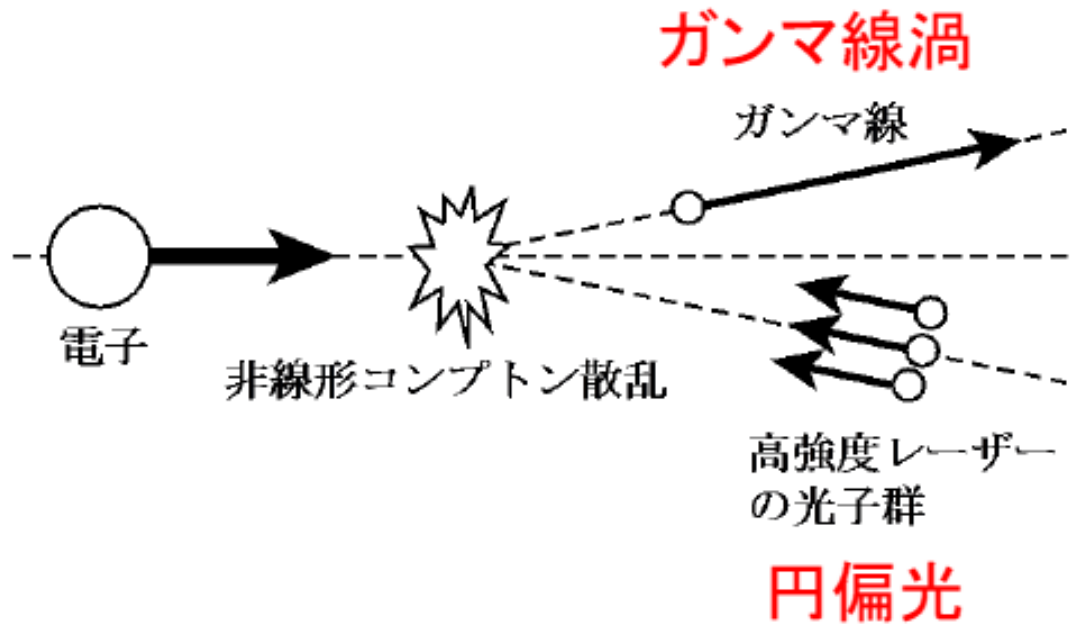


FIG. 4.  $y$  component of the electric field  $\underline{E}$  of the radiation at different times. (a)  $t = 0.2$ , (b)  $t = 0.4$ , (c)  $t = 0.6$  ps. (d) average intensity for  $m = 1$ ,  $\varepsilon = 1$ .

# 円偏光・大強度レーザーの 非線形コンプトン散乱



個々の光子のスピンの向きが揃っている。



非線形コンプトン散乱では1個の光子(ガンマ線)に変換される

古典電磁学による計算

Y. Taira, T. Hayakawa, M. Kato, Scientific Reports, 7, 5018 (2017).

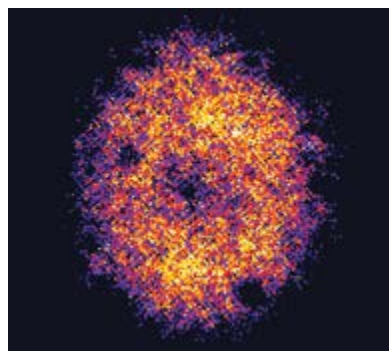
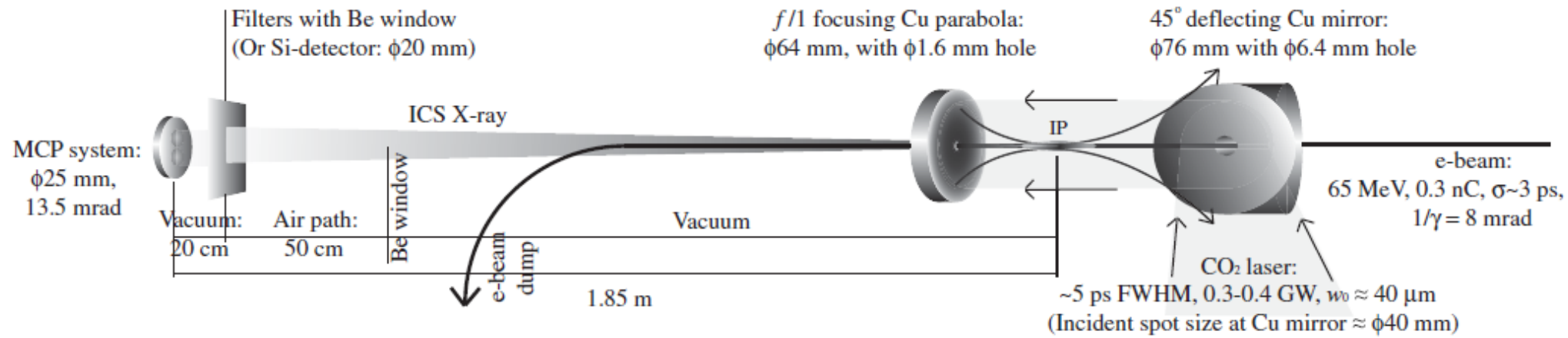
# 非線形コンプトン散乱の実験例

Observation of red shifting and harmonic radiation in inverse Compton scattering

Y. Sakai, et al. Phys. Rev. STAB, 18, 060702 (2015) BNL ATF

High Power CO<sub>2</sub> laser  $a_0=0.6$

$E_e = 65 \text{ MeV}$



Observation of 2<sup>nd</sup> harmonics

円環状の形状 ← 渦光の特徴

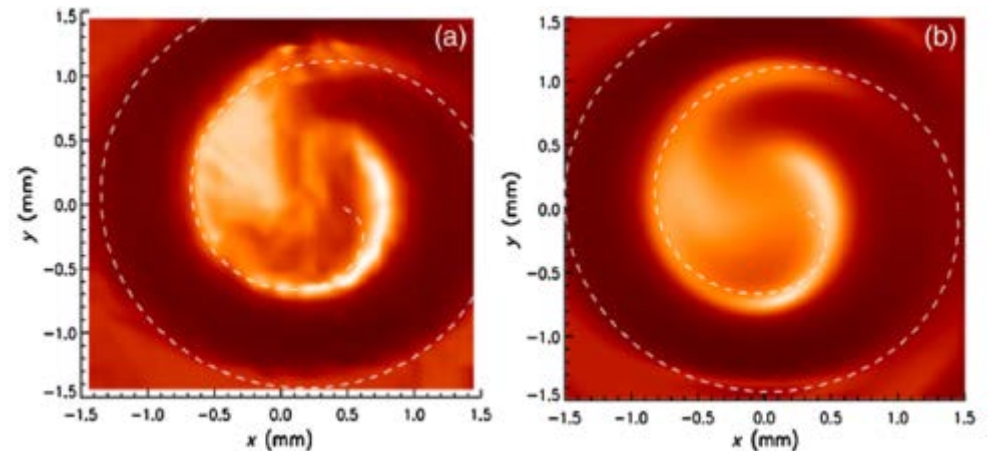
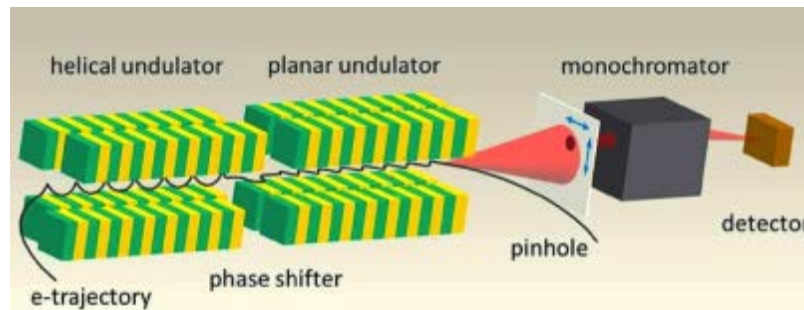
## Proposal for Generating Brilliant X-Ray Beams Carrying Orbital Angular Momentum

Shigemi Sasaki and Ian McNulty

ヘリカルアンジュレーター: 円偏光      高次高調波: ラゲールガウシアン  
 プラナーアンジュレーター: 直線偏光      高次高調波: エルミートガウシアン



J. Bahrtdt, et al. PRL 111, 034801 (2013)



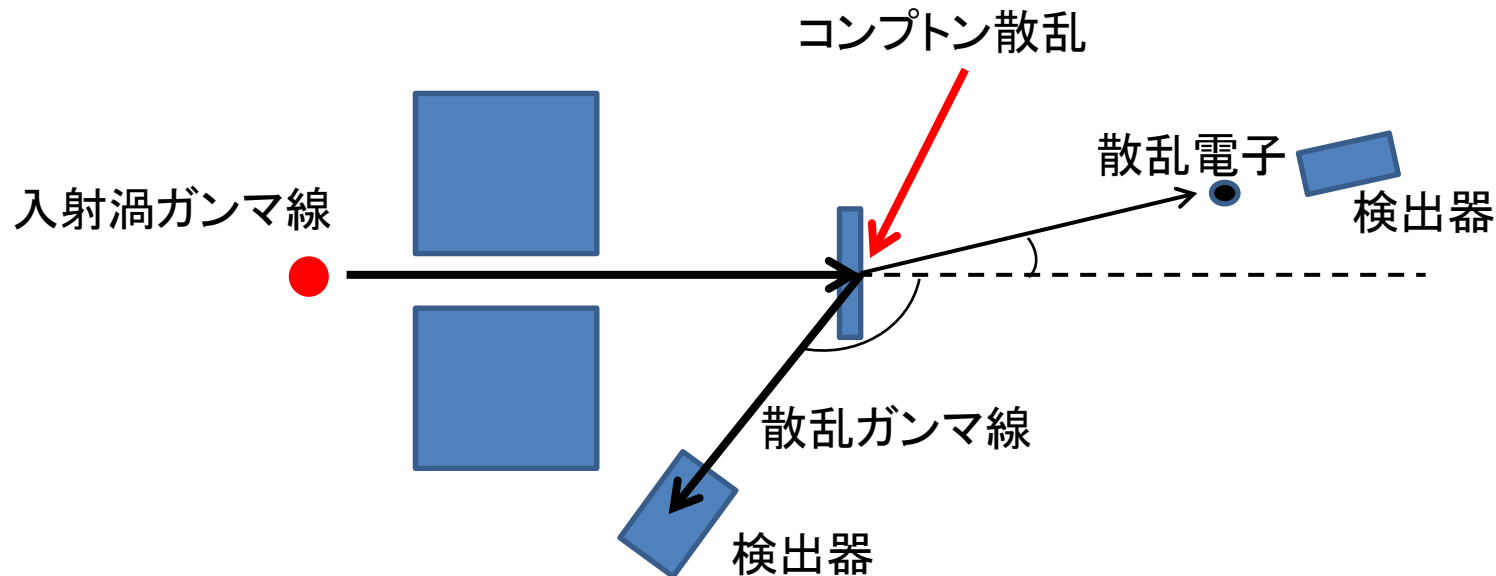
ヘリカルアンジュレーターによるラゲールガウシアン生成と干渉による確認

[T. Kaneyasu et al., J. Synchrotron Rad. 24, 934 \(2017\)](#)

どうやって渦ガンマ線を実証するか？

ラゲールガウシアン光の波動関数はZ軸に対して対称

散乱電子との同時計数を考える。



入射する渦ガンマ線のエネルギーは分かっているとする(500keVを仮定)。  
散乱した電子の散乱角度と、ガンマ線の散乱角度を同時計数する。

相対論的量子力学の枠組みで計算



Initial : **Laguerre-Gauss**

**Photon** with Energy  $k$

$$A_i(\mathbf{r}) = \frac{\epsilon_i(h_i)}{\sqrt{2k}} u(\mathbf{r}) e^{-ikt}$$

$$u(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{2}{\pi R_z} \frac{1}{w(z)}} G \left[ |L|, p, \frac{r}{w(z)} \right] \exp \left\{ i \left[ L\phi + kz + \frac{zr^2}{z_R w^2(z)} - (2p + |L| + 1)\theta_G \right] \right\}$$

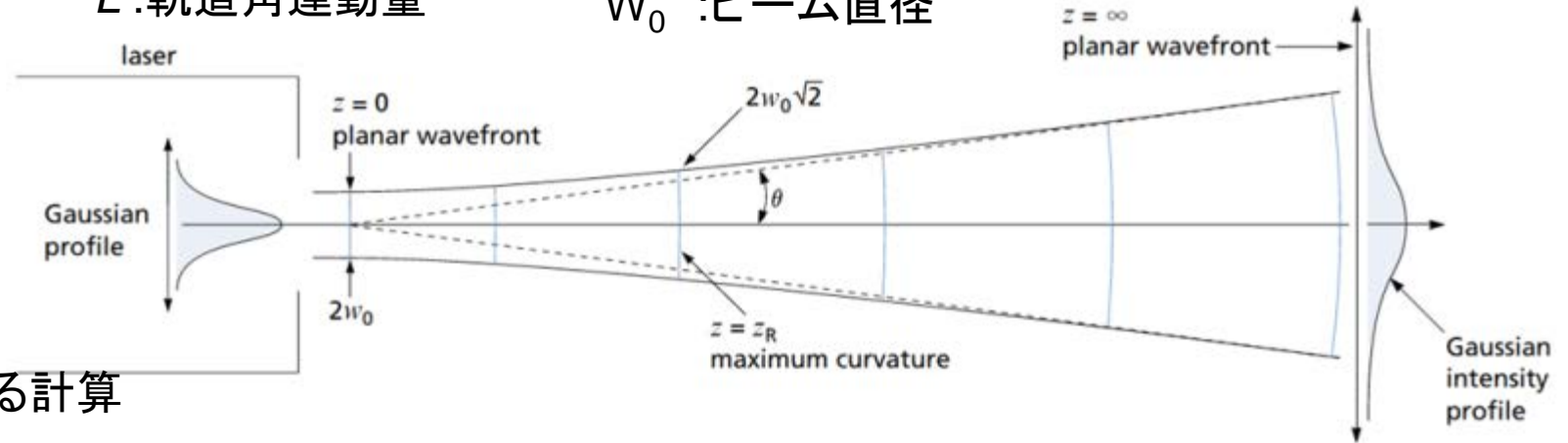
with

$$G[|L|, p, x] = \sqrt{\frac{p!}{\pi(|L| + p)!}} \left( \frac{x}{\sqrt{2}} \right)^{|L|} e^{-x^2/4} \mathcal{L}_p^{|L|} \left( \frac{x^2}{2} \right), \quad \mathcal{L}_p^{|L|} : \text{ラゲール関数}$$

$$\theta_G = \tan^{-1} \left( \frac{z}{z_R} \right), \quad w(z) = w_0 \sqrt{1 + z^2/z_R^2}, \quad z_R = kw_0^2/2.$$

$L$  : 軌道角運動量

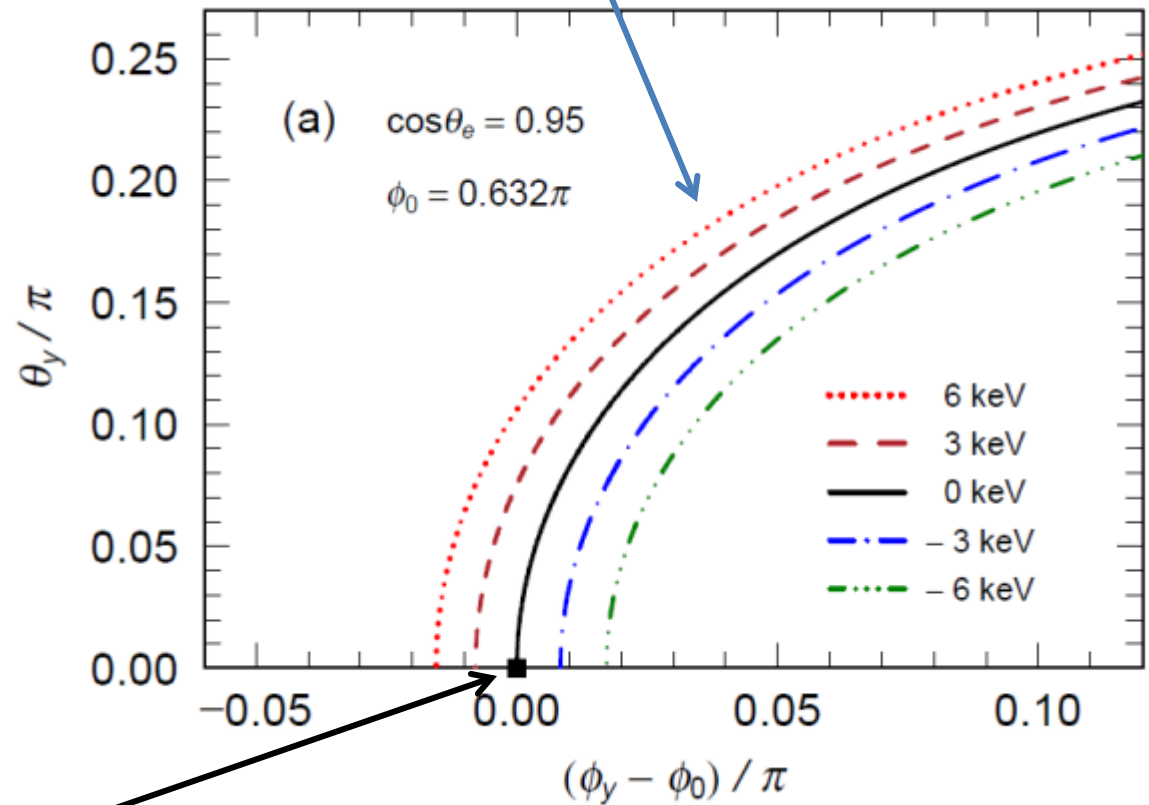
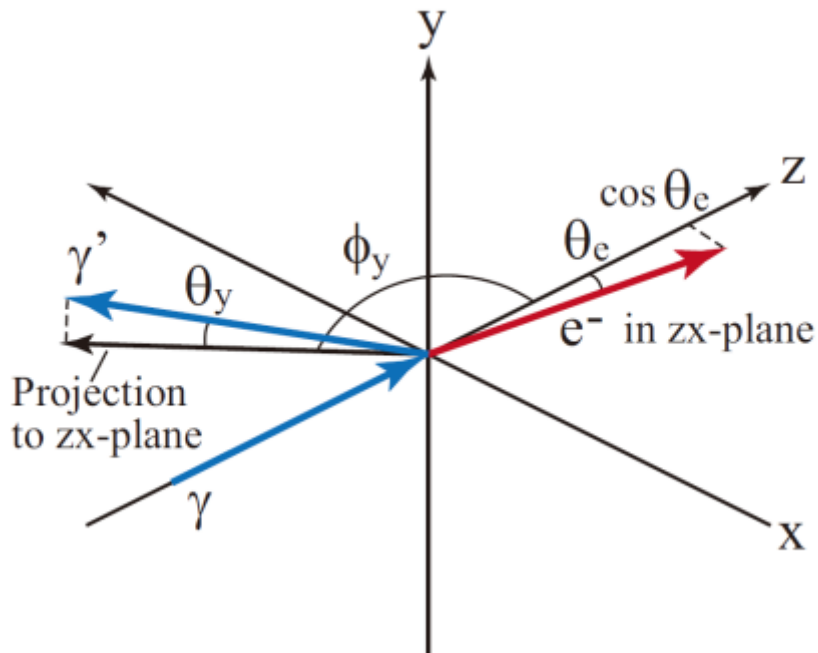
$W_0$  : ビーム直径



## (3) Cross Sections

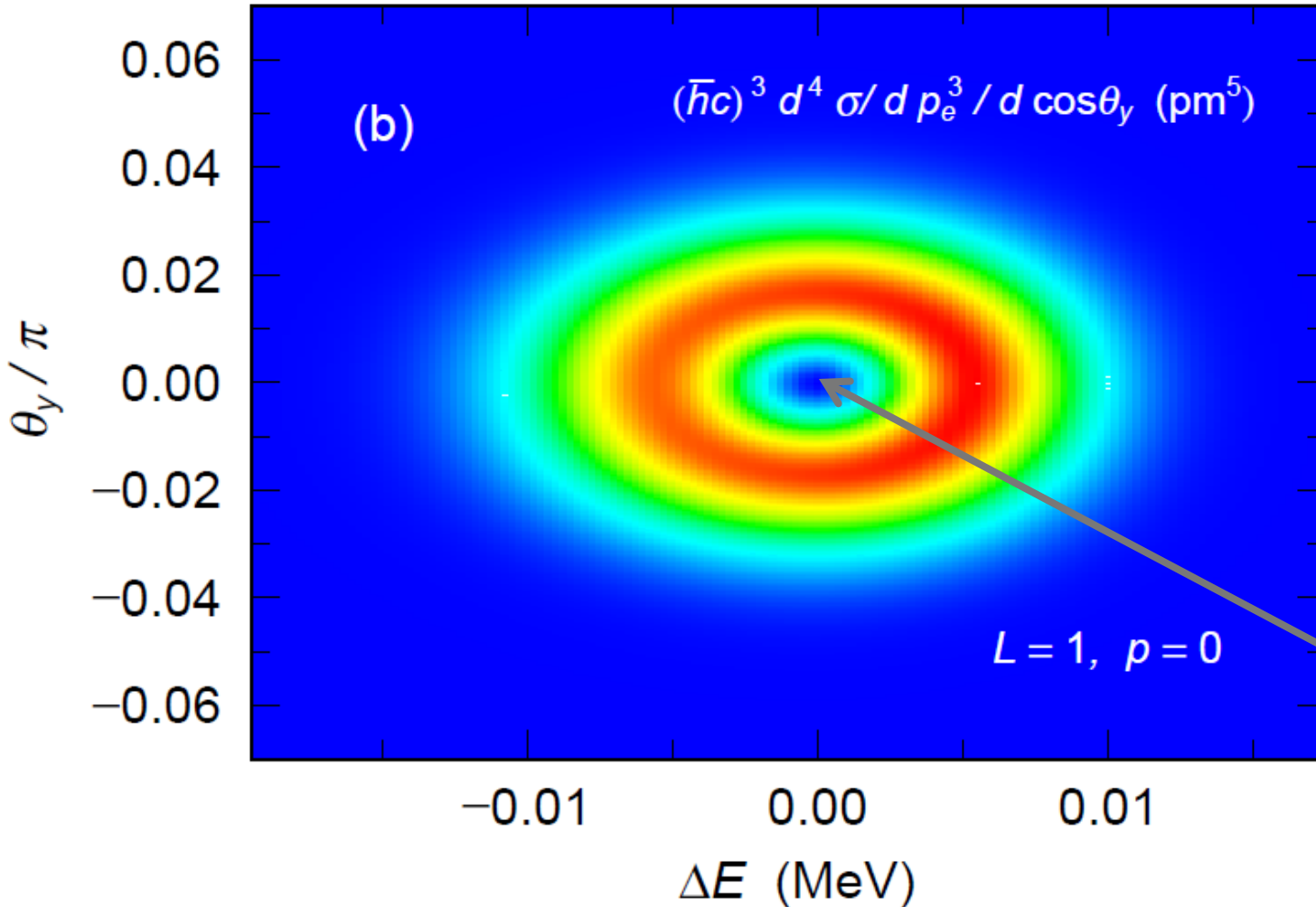
$$\frac{d^4\sigma}{d\mathbf{p}_e^3 d\sin\theta_y} = \frac{\alpha^2 w_0^2 |\mathbf{q}|}{4\pi m E_p |(k - q_z)q_x - q_z |\mathbf{p}_T||} \bar{W}_{if} [G(L, p; w_0 |\mathbf{p}_T + \mathbf{q}_T)|)]^2$$

$p_z + q_z + (\mathbf{p}_T + \mathbf{q}_T)^2 / 2k - k = 0$  を満たす。



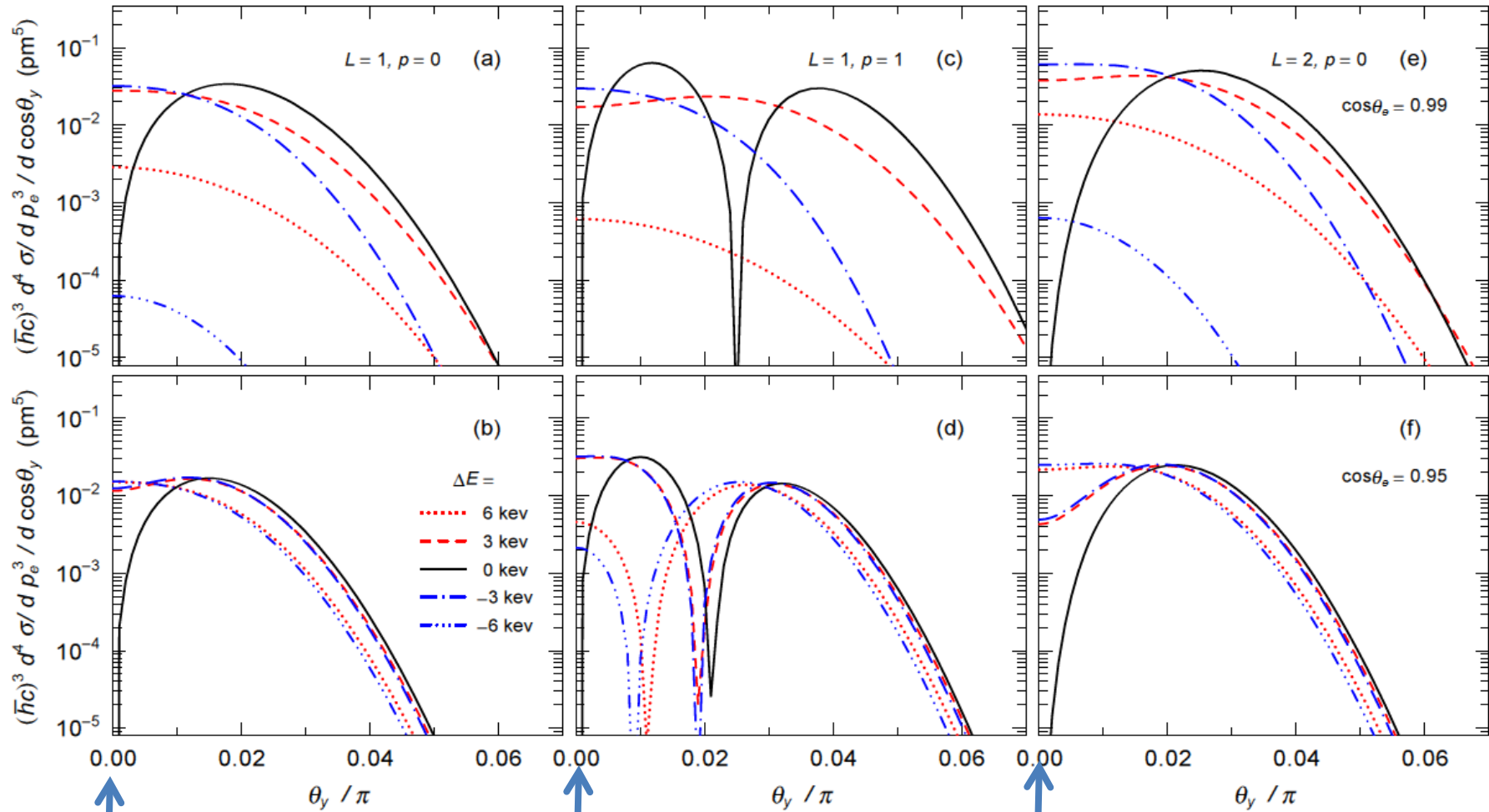
通常の平面波の場合のコンプトン散乱(ユニークに散乱角度が決まる)

通常のコンプトン散乱平面からの角度のずれ



通常のコンプトン散乱は(0,0)

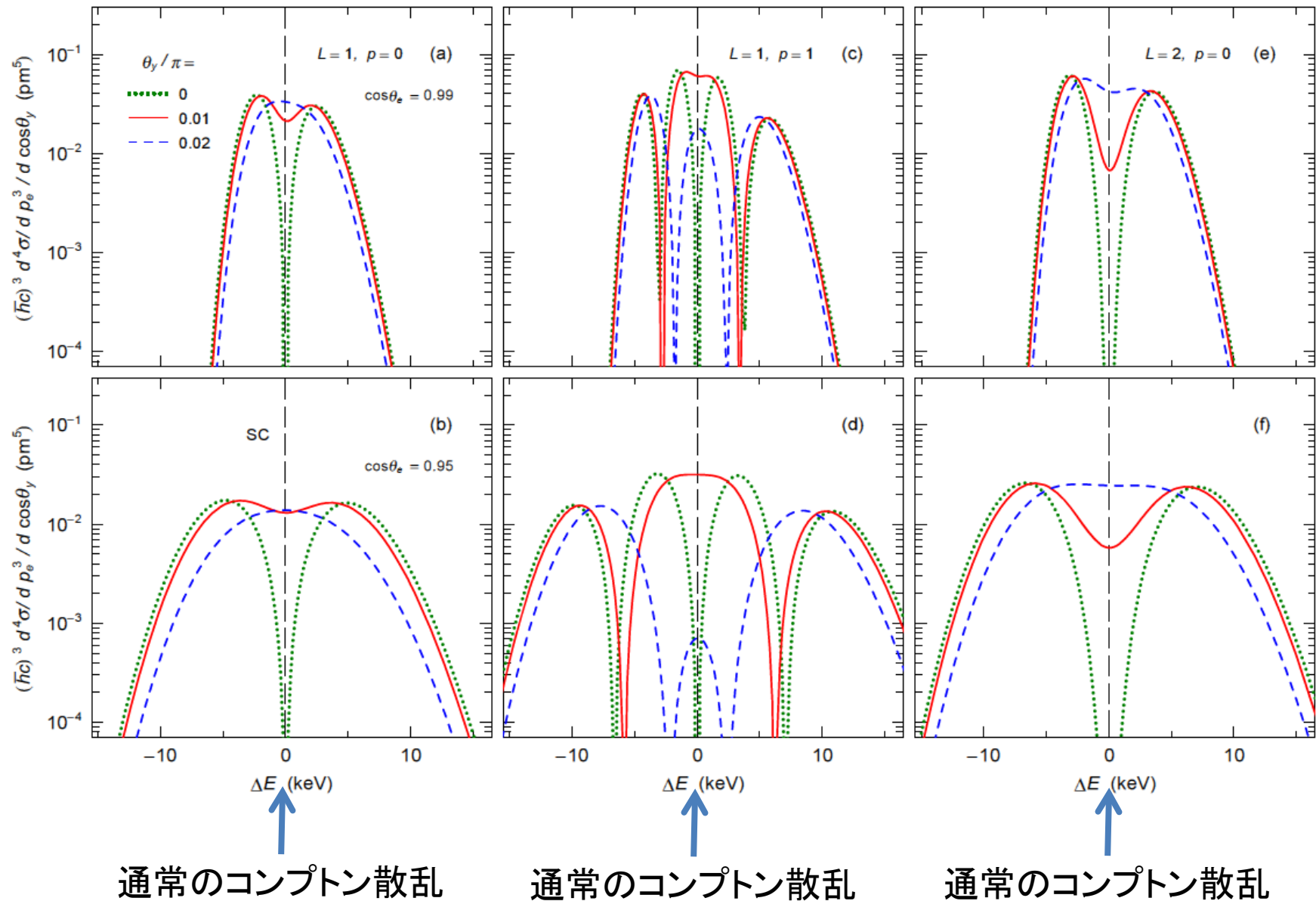
丸山智幸(日大)による計算



通常のコプトン散乱

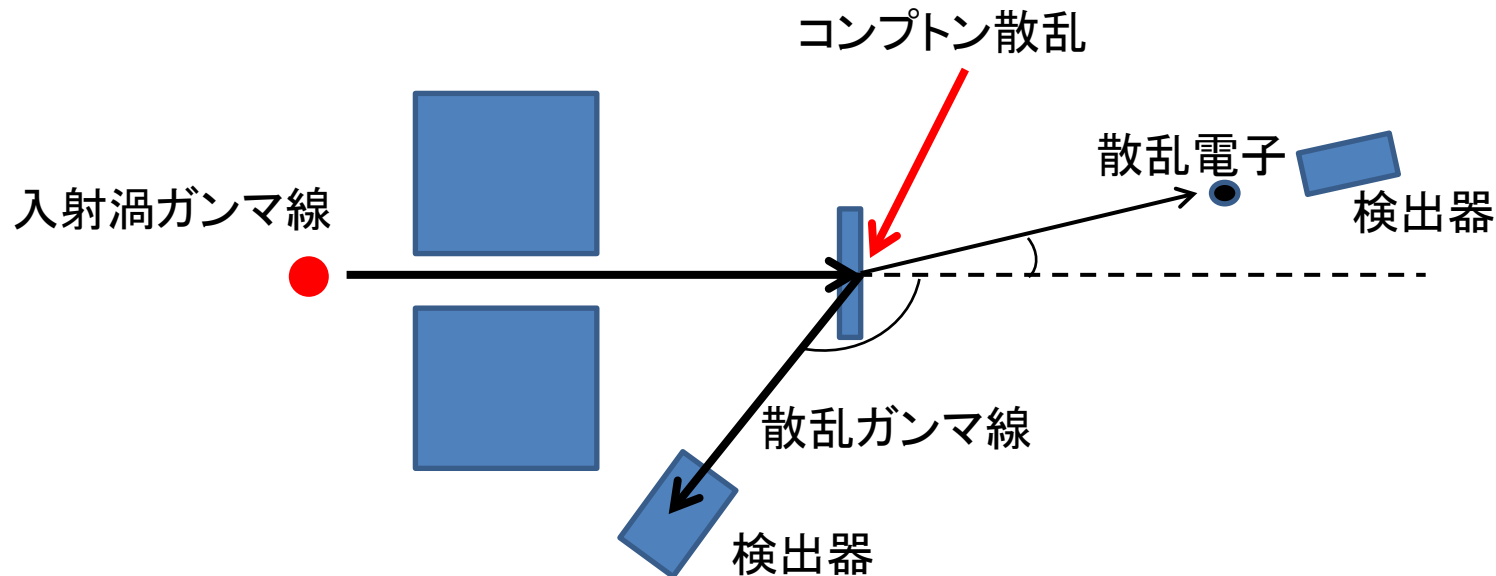
通常のコプトン散乱

通常のコプトン散乱



ラゲールガウシアン光の波動関数はZ軸に対して対称

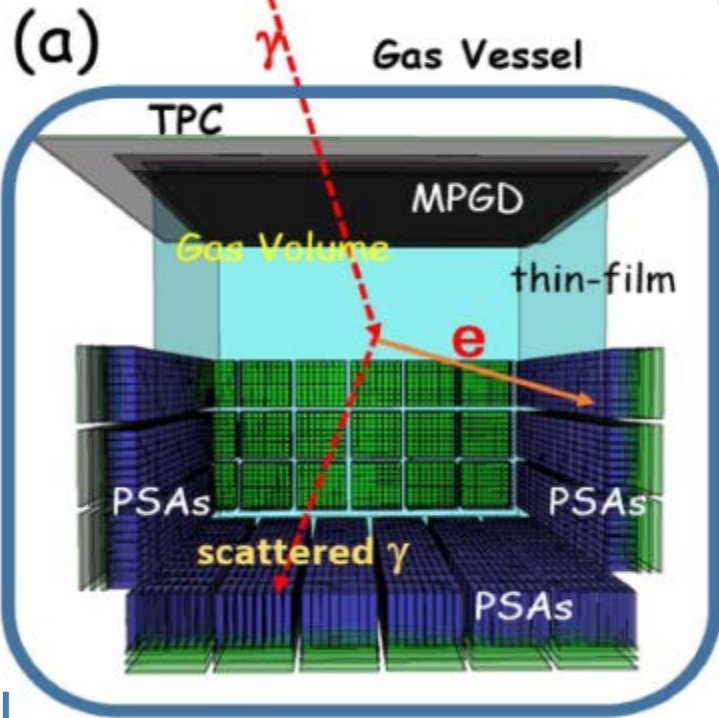
散乱電子との同時計数を考える。



入射する渦ガンマ線のエネルギーは分かっているとする(500keVを仮定)。  
散乱した電子の散乱角度と、ガンマ線の散乱角度を同時計数する。

相対論的量子力学の枠組みで計算

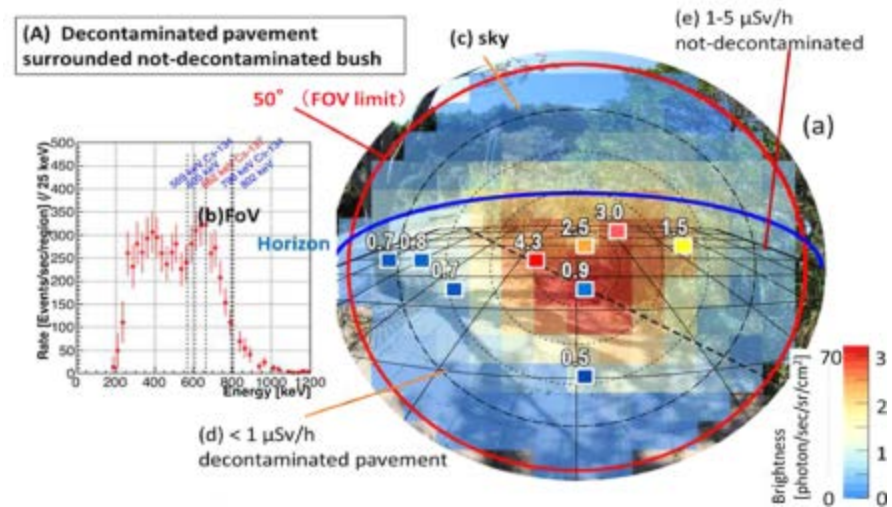
電子軌跡追跡型コンプトンカメラ



最初のコンプトン散乱にガス検出器を用いることで、電子の軌跡を測定。

T. Tanimori, et al. Sci. Rep. 7:41511 (2017)

ガンマ線天文学のために開発中



福島 of 土壌汚染を現場で試験

D. Tomono, et al. Sci. Rep. 7:41972 (2017)

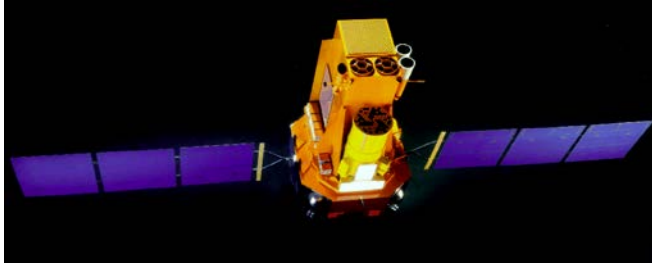
↓  
コンプトンカメラを使った医療応用  
T. Hayakawa, et al. Heliyon (2018)

ラゲールガウシアンガンマ線の測定が可能

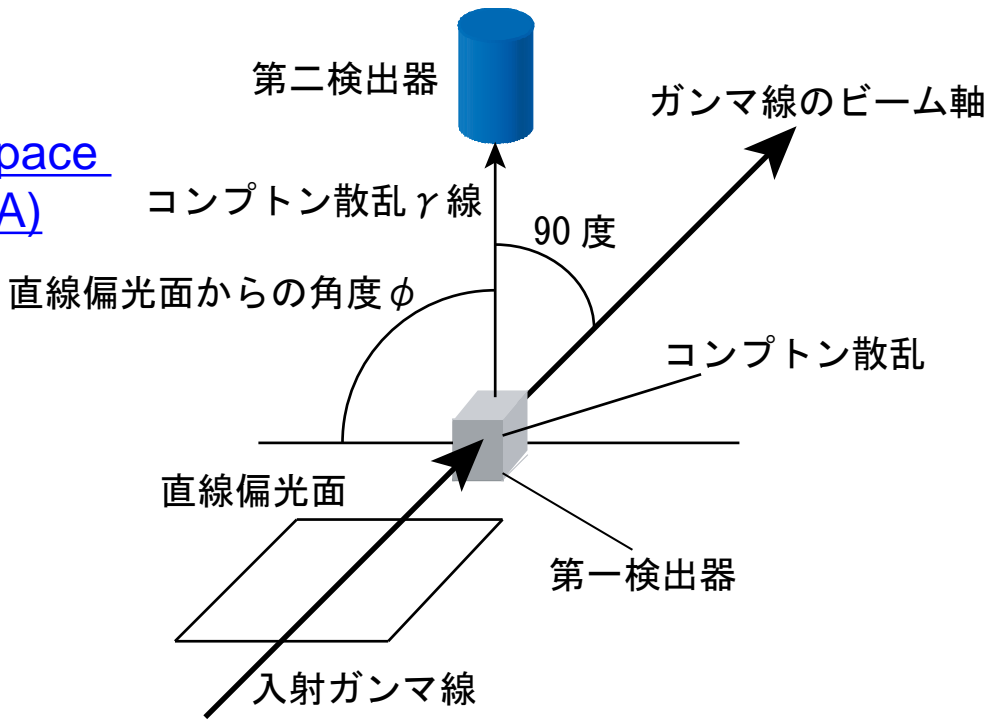
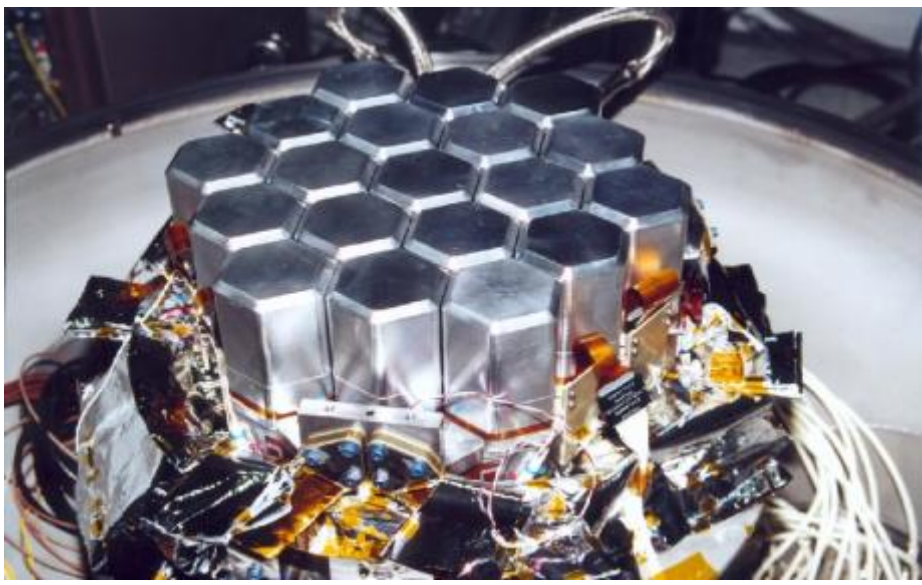


同時計数はちょっと難しい。  
もう少し簡単な方法はないか？

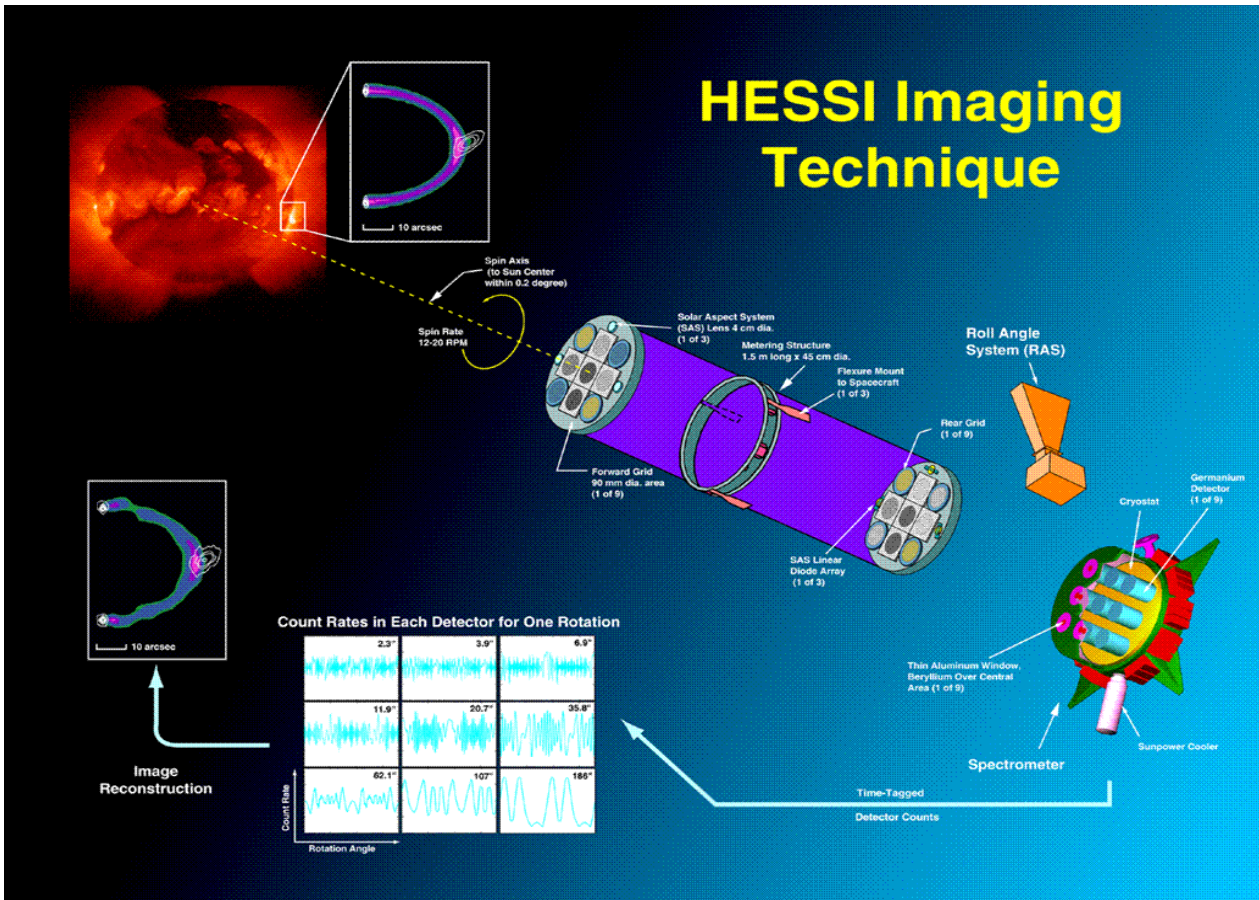
## Integral



[European Space Agency \(ESA\)](http://www.esa.int)



直線偏光度の測定に、コンプトン散乱が原子核実験、 $\gamma$ 線天文学でつかわれている。



W. Coburn & S. E. Boggs, 423, 415 (2003).

Polarization of the prompt gamma-ray emission from the g-ray burst of 6 December 2002



80%の直線偏光度  
(9個のGe検出器でコンプトン散乱を計測した)  
強磁場中のシンクロトロン放射と推測される。

磁場がガンマ線バーストのメカニズムか？

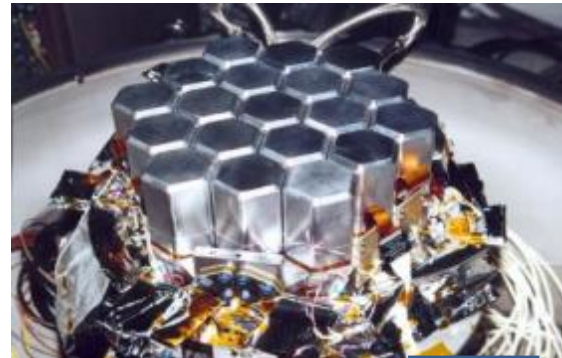
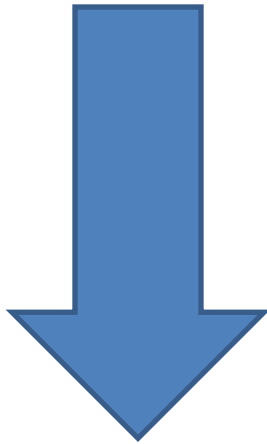
[https://hesperia.gsfc.nasa.gov/hessi/hessi\\_show\\_image.htm](https://hesperia.gsfc.nasa.gov/hessi/hessi_show_image.htm)

この後、複数のガンマ線バースト時の直線偏光度が計測される。

## Proposal for Generating Brilliant X-Ray Beams Carrying Orbital Angular Momentum

Shigemi Sasaki and Ian McNulty

プラナーアンジュレーター: 直線偏光  
高次高調波: エルミートガウシアン



直線偏光度が非常に大きいMeV領域の直線偏光 $\gamma$ 線の観測

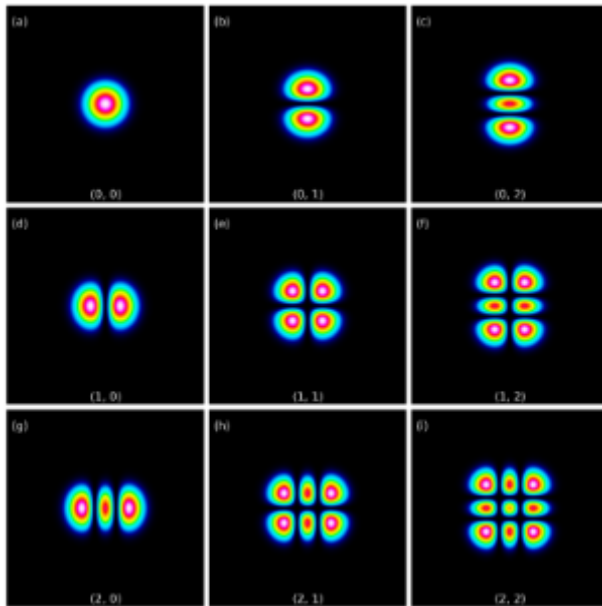
高磁場中の電子シンクロトロン放射と考えられる



ガンマ線バーストでも、高磁場のシンクロトロン高次高調波でエルミートガウシアンガンマ線が生成されているはず。

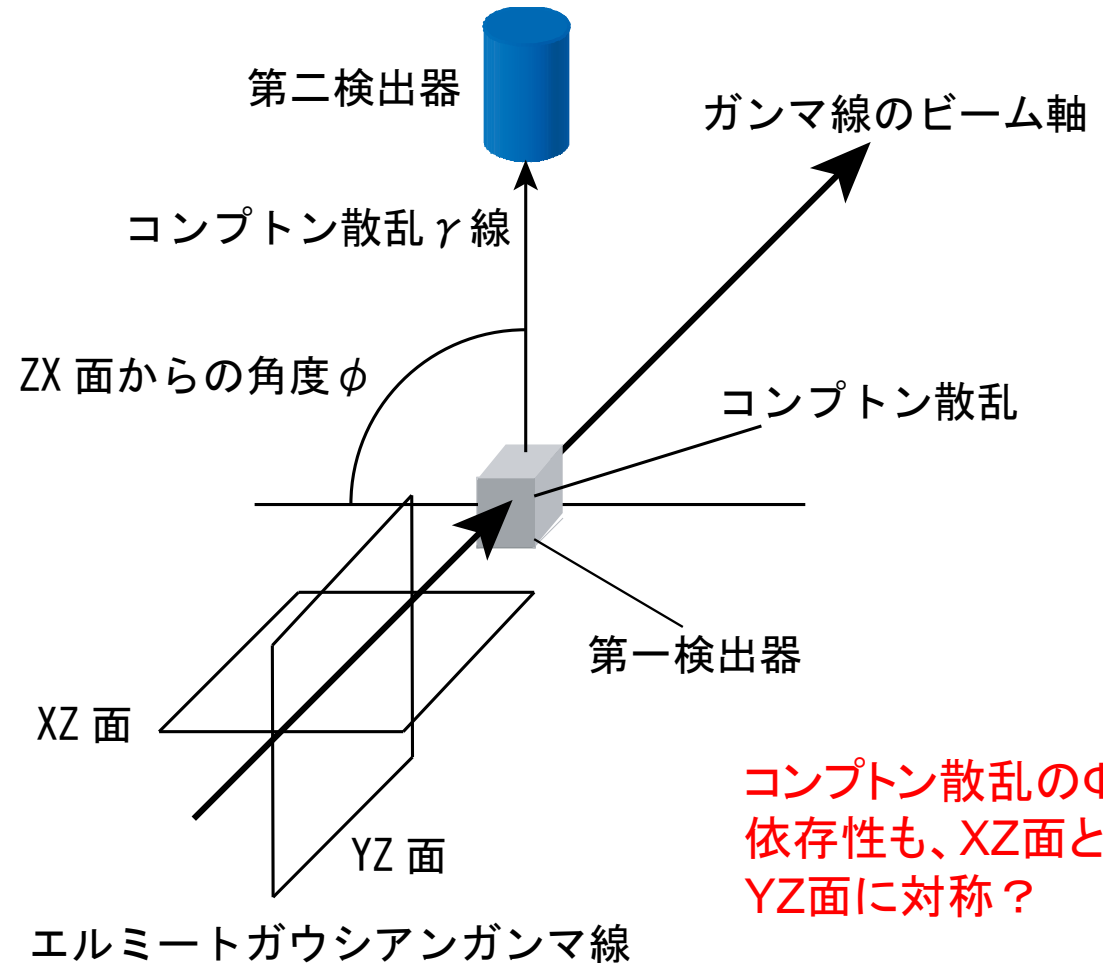
# エルミートガウシアン光のコンプトン散乱

X軸とY軸に対して調和振動している波(Z軸に進行)



直線偏光 $\gamma$ 線:  
特異な面は1つ

エルミートガウシアン光:  
特異な面は2つ



エルミートガウシアン関数

$$u() = \sqrt{\frac{2}{R_z}} \frac{1}{w(z)} \underbrace{f_{n_x} \left( \frac{\sqrt{2}x}{w(z)} \right)} \underbrace{f_{n_y} \left( \frac{\sqrt{2}y}{w(z)} \right)} \exp \left[ ikz + \frac{ikr^2}{2R(z)} - i(n_x + n_y + 1)\theta_z \right]$$

with

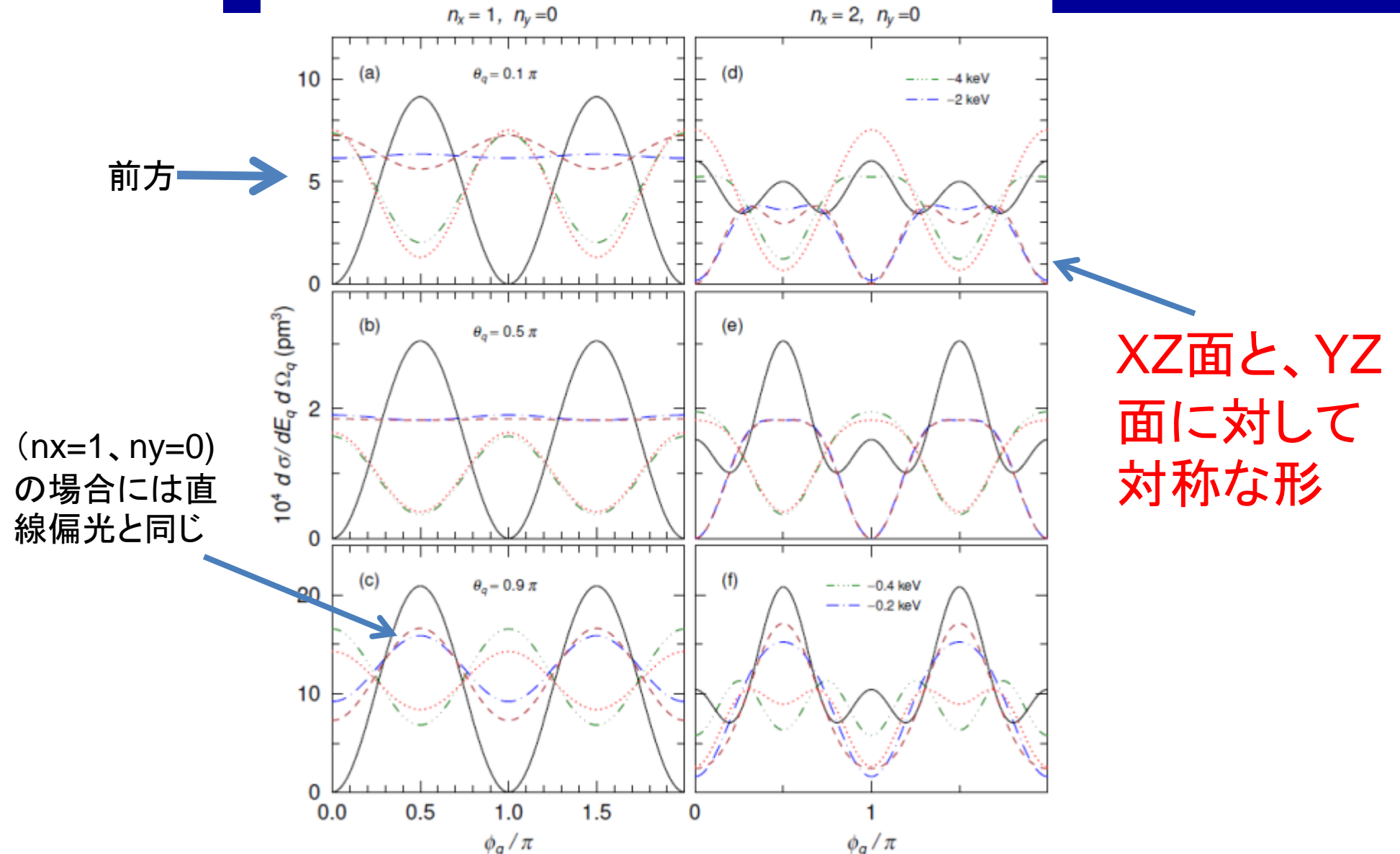
$$f_n(x) = (2^n \sqrt{\pi n!})^{-1/2} \underbrace{H_n(x)} e^{-x^2/2}, \quad H_n: \text{エルミート多項式}$$

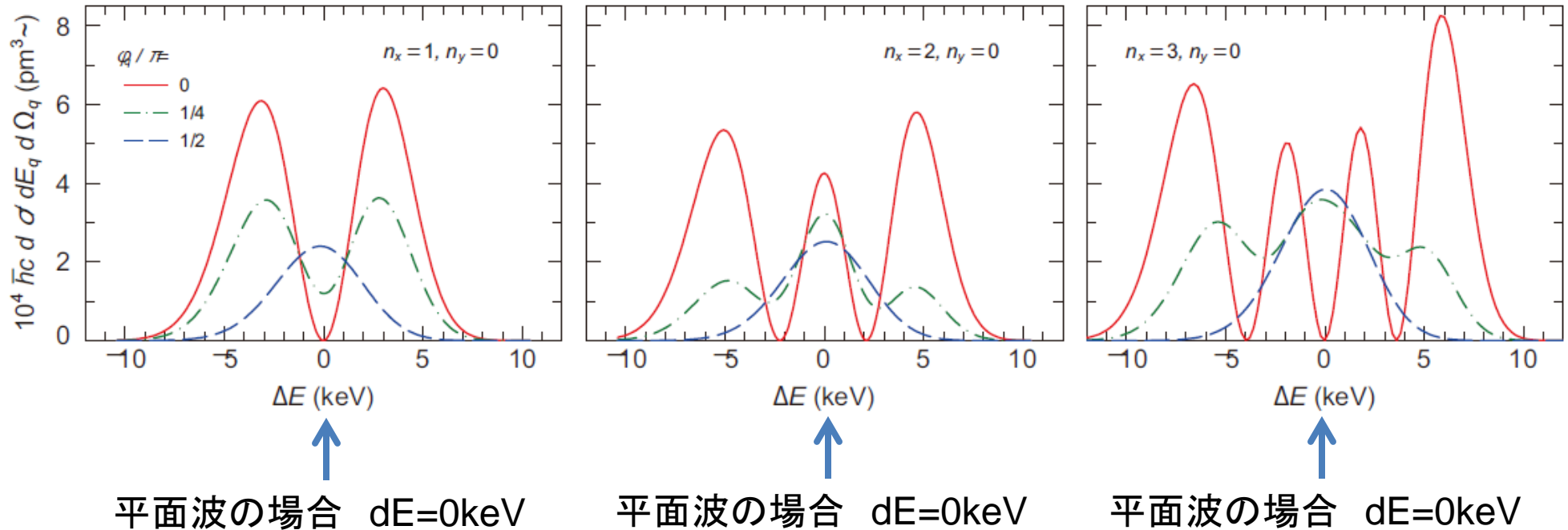
$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \frac{z^2}{z_R^2}}, \quad R(z) = (z^2 + z_R^2)/z, \quad z_R = kw_0^2/2. \quad \theta_z = \tan^{-1} \left( \frac{z}{z_R} \right)$$

微分反応断面積

$$\frac{d^3\sigma}{d\Omega dE_q} = \frac{\alpha^2 w_0^2 E_q}{2mk} \int \frac{dp_f}{E_f} \delta(E_f + E_q - m - k) \delta \left( Q_z - \sqrt{k^2 - (Q_x^2 + Q_y^2)} \right) W_{if} \\ \times \left[ f_{n_x} \left( \frac{w_0 Q_x}{\sqrt{2}} \right) f_{n_y} \left( \frac{w_0 Q_y}{\sqrt{2}} \right) \right]^2,$$

$$W_{if} = \frac{4|q|}{k} + \frac{4k}{|q|} - \frac{4}{k^2} \left[ |p_f|^2 - \frac{(p_f \cdot q)^2}{|q|^2} \right] \quad E_q = |q| \text{ and } Q = p_f + q$$





エルミートガウシアンでは、エネルギーがユニークに決まらない。

そのスペクトルには、その面におけるノードの数だけ谷が現れる。



ラゲールガウシアン光、エルミートガウシアン光は、高い角運動量を運ぶことができる。

従来とは異なる、原子核・素粒子との反応が予想される(理論計算も始まったばかり)。

生成に有効な手法の一つは、10GeV以上の電子のアンジュレーターの高次高調波である。

新しい分野が開かれようとしている。