

# エミッタンス低減現象を定量的に表す新指標について

(公財)高輝度光科学研究センター

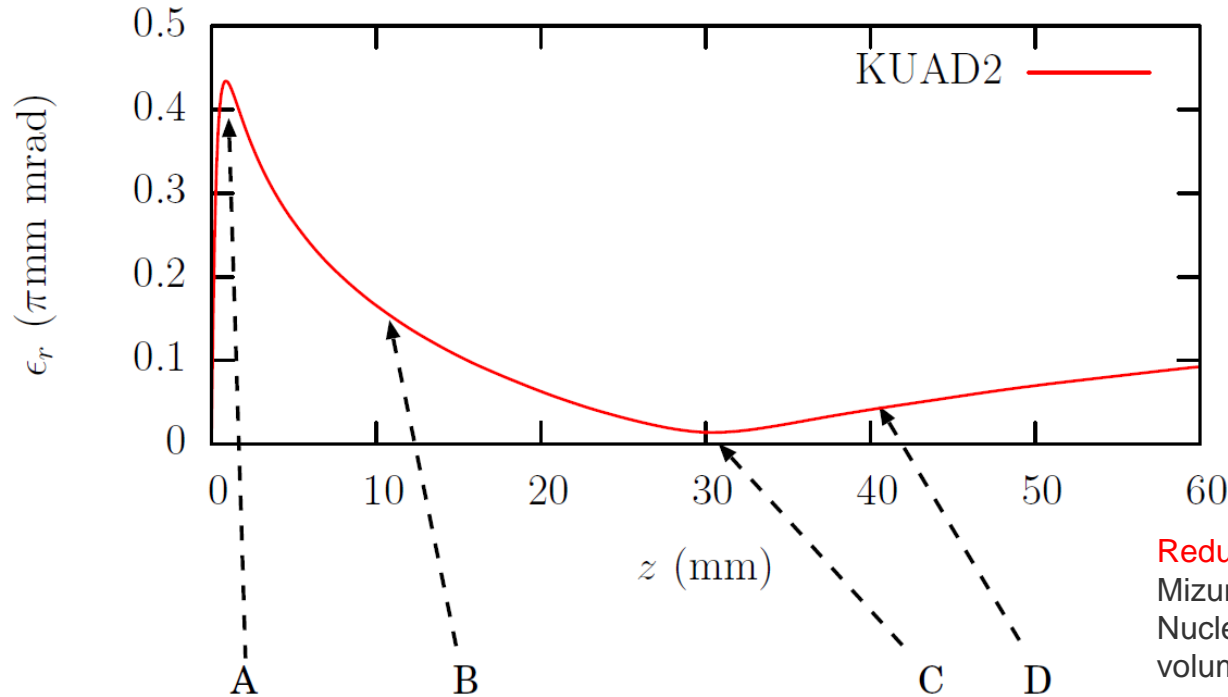
水野 明彦

# Contents

1. エミッタンスリダクションの事例
2. エミッタンス低減現象を定量的に表す新指標について
3. 新指標で表現したエミッタンス低減現象の例
  - 理想的DCビームでのエミッタンス低減
  - ソレノイドコイルによるエミッタンス低減
  - パルスビームでのエミッタンス低減
4. 非軸対称ビームのエミッタンス低減について
5. シミュレーションコードの精度の問題
6. まとめ

# 理想平面カソードからの連続ビーム引き出し 一様電界でフリースペースを加速し続ける

径方向 :  $\Phi 2 \text{ mm}$  一様分布  
 長手方向 :  $40 \text{ A/cm}^2$  一様な連続ビーム  
 初期熱エミッタンス :  $0 \text{ } \pi\text{mm mrad}$   
 理想的な平面カソード  
 カソード鏡像効果を考慮  
 一様電界  $5\text{MV/m}$  で引き出して加速し続ける



simulated by KUAD2  
 京大エネルギー理工学研究所  
 増田准教授

Reduction of transverse emittance in electron injectors caused by space charge effects  
 Mizuno, A., Masuda, K., Yamamoto, M.  
 Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A:  
 volume 774, year 2015, pp. 51 - 59

ある位置  $z$  を通過した粒子の積算  
 により  $z$  でのエミッタンスを算出

$$\epsilon_r(z) = \sqrt{\langle r^2 \rangle_z \langle (\gamma\beta r')^2 \rangle_z - \langle \gamma\beta r r' \rangle_z^2}$$



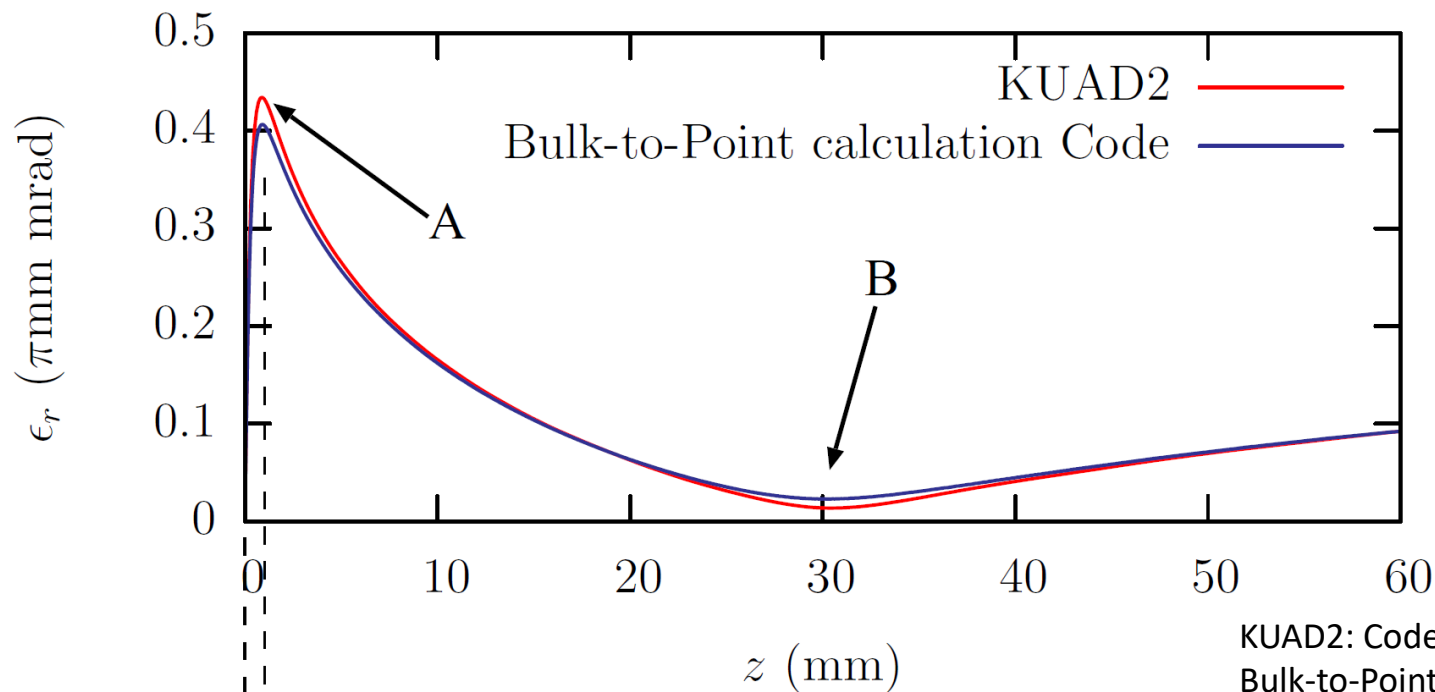
プロジェクションエミッタンスでは  
 なく、スライスエミッタンスに近い

rms エミッタンス  $\neq$  Liouville's volume

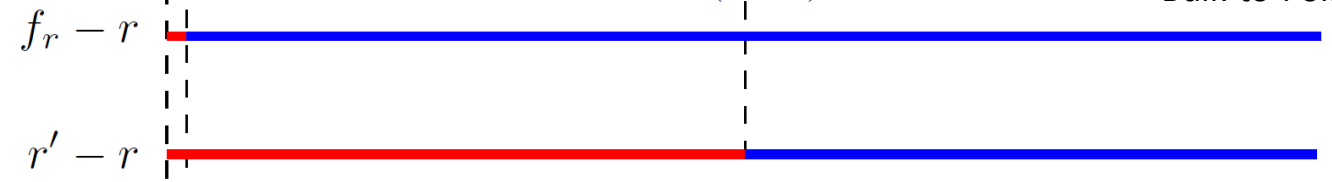


エミッタンスが低減しても理論的矛盾はない

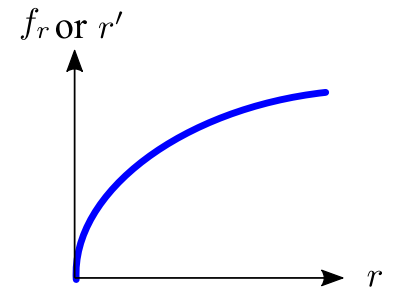
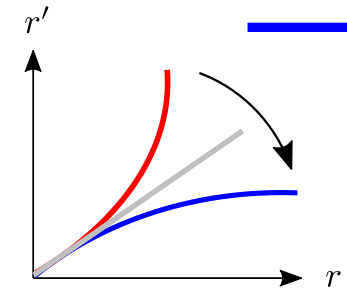
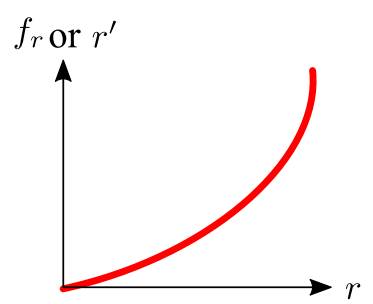
# エミッタンス減少のメカニズム



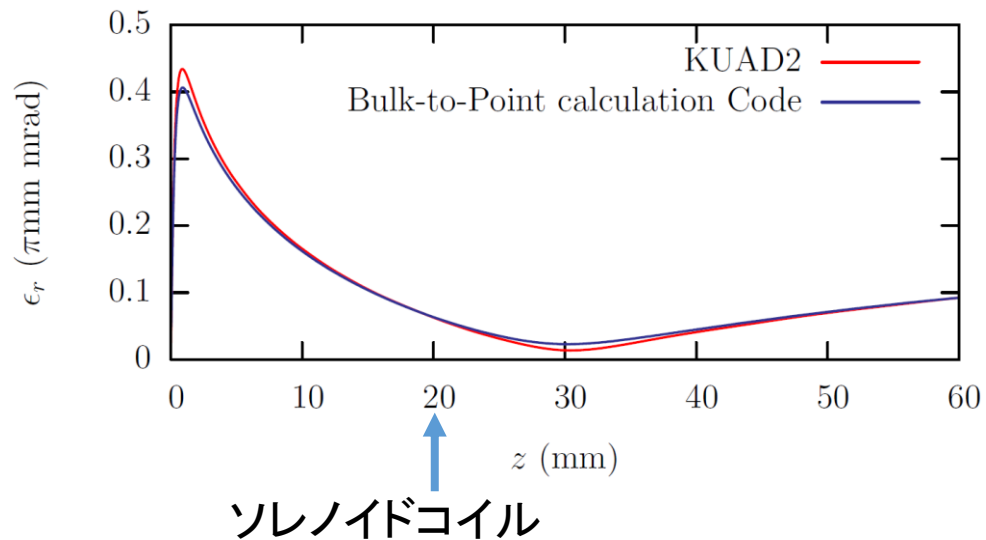
KUAD2: Coded by 増田准教授,京大エネルギー理工学研究所  
 Bulk-to-Point calculation Code: Coded by 水野, SPring-8



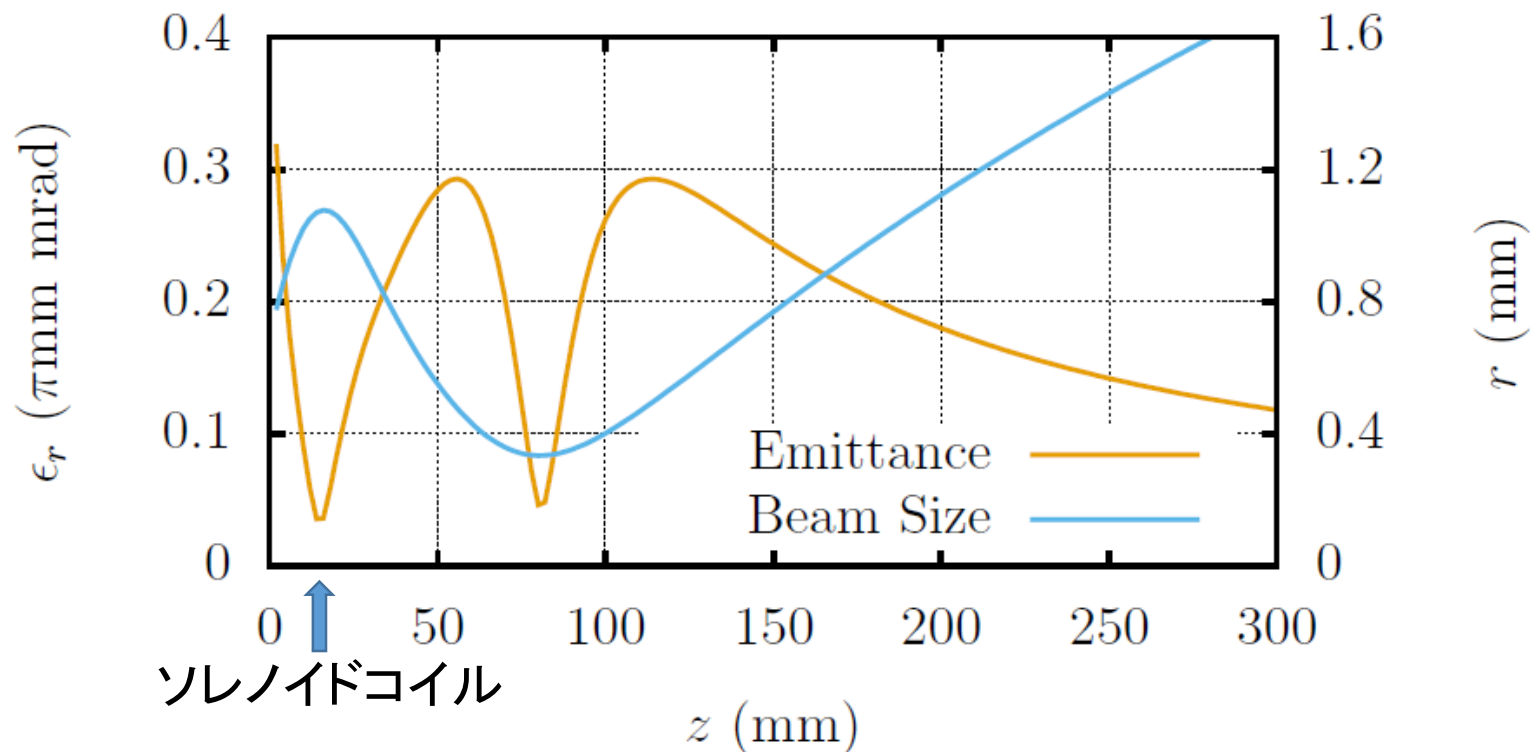
— Convex Downward  
 — Convex Upward



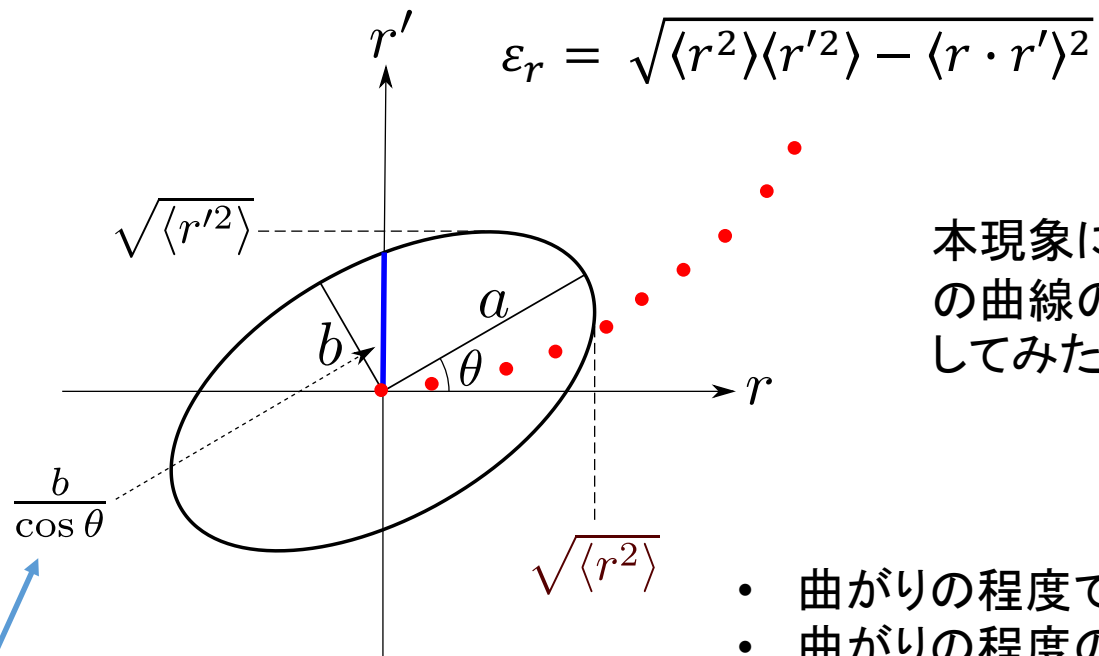
# 理想平面から引き出し、加速し続ける連続ビームをソレノイド磁場で集束



2016年加速器学会@幕張メッセ  
2018年高輝度高周波電子銃研究会



位相空間の曲がりの程度を数値的に表現したい……



本現象に説明を加えるために、 $r - r'$ 空間上の曲線の曲がりの程度を数値化する等工夫してみたが、

- 曲がりの程度ではエミッタンス低減現象を定量的に表せていない
- 曲がりの程度が分かり難く、複雑な現象を説明しきれていない

Degree of Curve



- エミッタンスの増減を定量的に表現できる新指標が必要
- rmsエミッタンスの概念を拡張して表現できれば都合が良い

# Contents

1. エミッタンスリダクションの事例
2. エミッタンス低減現象を定量的に表す新指標について
3. 新指標で表現したエミッタンス低減現象の例
  - 理想的DCビームでのエミッタンス低減
  - ソレノイドコイルによるエミッタンス低減
  - パルスビームでのエミッタンス低減
4. 非軸対称ビームのエミッタンス低減について
5. シミュレーションコードの精度の問題
6. まとめ

# rmsエミッタンスについて

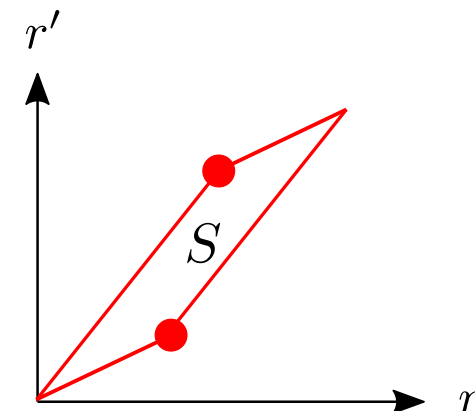
$$\epsilon_r = \sqrt{\langle r^2 \rangle \langle r'^2 \rangle - \langle r \cdot r' \rangle^2}$$

$$\begin{aligned} n^2 \langle r^2 \rangle \langle r'^2 \rangle &= (r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_n^2) (r_1'^2 + r_2'^2 + \dots + r_n'^2) \\ &= \underbrace{r_1^2 r_1'^2}_{\text{red}} + \underbrace{r_1^2 r_2'^2}_{\text{blue}} + \dots + r_1^2 r_n'^2 \\ &\quad + \underbrace{r_2^2 r_1'^2}_{\text{blue}} + \underbrace{r_2^2 r_2'^2}_{\text{red}} + \dots + r_2^2 r_n'^2 \\ &\quad + \dots \dots \dots \\ &\quad + r_n^2 r_1'^2 + r_n^2 r_2'^2 + \dots + \underbrace{r_n^2 r_n'^2}_{\text{red}} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} n^2 \langle r r' \rangle^2 &= (r_1 r_1' + r_2 r_2' + \dots + r_n r_n')^2 \\ &= \underbrace{r_1^2 r_1'^2}_{\text{red}} + \underbrace{r_2^2 r_2'^2}_{\text{red}} + \dots + \underbrace{r_n^2 r_n'^2}_{\text{red}} \\ &\quad + \underbrace{2r_1 r_1' r_2 r_2'}_{\text{blue}} + 2r_1 r_1' r_3 r_3' + \dots + 2r_1 r_1' r_n r_n' \\ &\quad + 2r_2 r_2' r_3 r_3' + \dots + 2r_2 r_2' r_n r_n' \\ &\quad + \dots \dots \dots \\ &\quad + 2r_{n-1} r_{n-1}' r_n r_n' \end{aligned} \quad (2)$$

(1)式から(2)式を引くと

$$\begin{aligned} n^2 \left( \langle r^2 \rangle \langle r'^2 \rangle - \langle r r' \rangle^2 \right) &= n^2 \epsilon_r^2 = \\ &= \underbrace{(r_1 r_2' - r_2 r_1')^2}_{\text{blue}} + (r_1 r_3' - r_3 r_1')^2 + \dots + (r_1 r_n' - r_n r_1')^2 \\ &\quad + (r_2 r_3' - r_3 r_2')^2 + \dots + (r_2 r_n' - r_n r_2')^2 \\ &\quad + \dots \dots \dots \\ &\quad + (r_{n-1} r_n' - r_n r_{n-1}')^2 \end{aligned} \quad (3)$$



(3)式は、位相空間上の任意の2電子と原点が成す平行四辺形の面積Sの2乗和

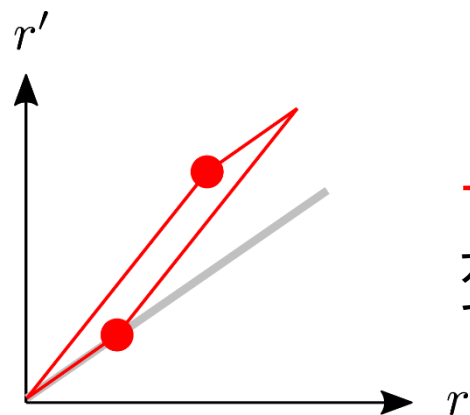
$$\therefore \epsilon_r = \sqrt{\left( \sum_{j=1}^N S_j^2 \right) / n^2} = \sqrt{\langle S^2 \rangle} / \sqrt{2}$$

$$S_j, j = 1 \dots N, N = n(n-1)/2 \approx n^2/2$$



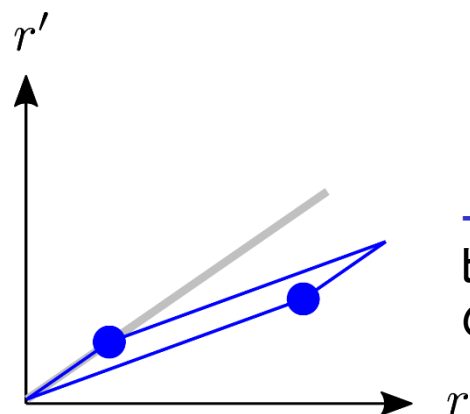
# 新指標の提案

$s$ は負の値をとっても良いと考える。



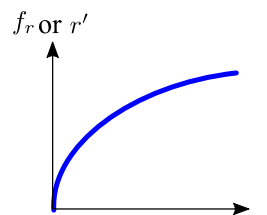
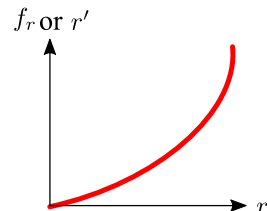
$$s < 0$$

下に凸の位相空間分布に対応  
カソード近辺等、特殊な状況下での空間電荷効果



$$s > 0$$

上に凸の位相空間分布に対応  
ビームが径方向に拡散する場合の通常の空間電荷効果



新指標を、 $\langle S^2 \rangle$ で表されるrmsエミッタンスに対応して、

$$\epsilon_r = \sqrt{\left(\sum_{j=1}^N S_j^2\right) / n^2} = \sqrt{\langle S^2 \rangle} / \sqrt{2} \quad \longleftrightarrow \quad \epsilon_{mean} = \alpha \langle S \rangle$$

と定義する。 $s$ が全て正で、かつ、正規分布している場合に $\epsilon_{mean}$ がrmsエミッタンスに一致するように $\alpha$ を定める。

$$\langle S \rangle = \sqrt{2/\pi} \cdot \sqrt{\langle S^2 \rangle} \quad \text{より} \quad \epsilon_{mean} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \langle S \rangle$$

## 新指標の特徴

- ・位相空間分布が下に凸  $\Rightarrow \epsilon_{mean} < 0$
- ・位相空間分布が上に凸  $\Rightarrow \epsilon_{mean} > 0$
- ・ $r - f_r$ 分布が下に凸である力が作用  $\Rightarrow$  減少
- ・ $r - f_r$ 分布が上に凸である力が作用  $\Rightarrow$  増加

# Contents

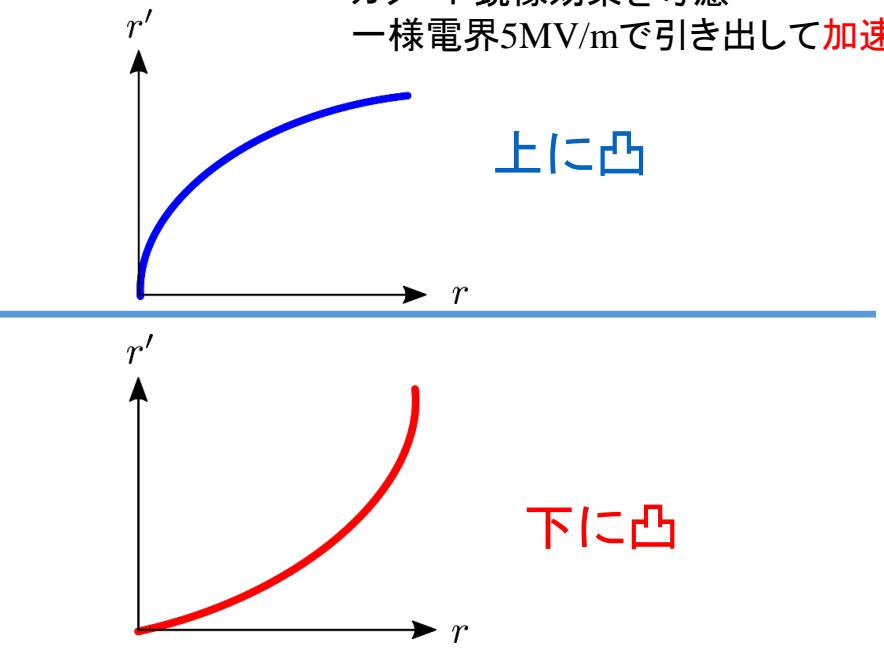
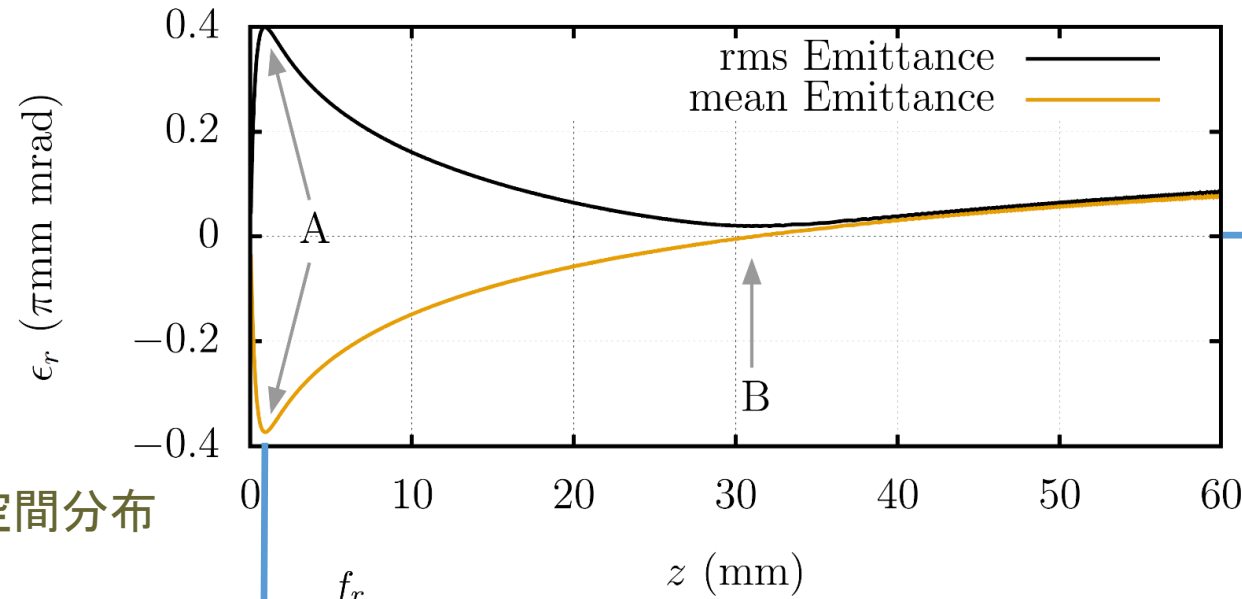
1. エミッタンスリダクションの事例
2. エミッタンス低減現象を定量的に表す新指標について
3. 新指標で表現したエミッタンス低減現象の例
  - 理想的DCビームでのエミッタンス低減
  - ソレノイドコイルによるエミッタンス低減
  - パルスビームでのエミッタンス低減
4. 非軸対称ビームのエミッタンス低減について
5. シミュレーションコードの精度の問題
6. まとめ

# $\epsilon_{mean}$ を用いて表したエミッタンス低減現象の計算例

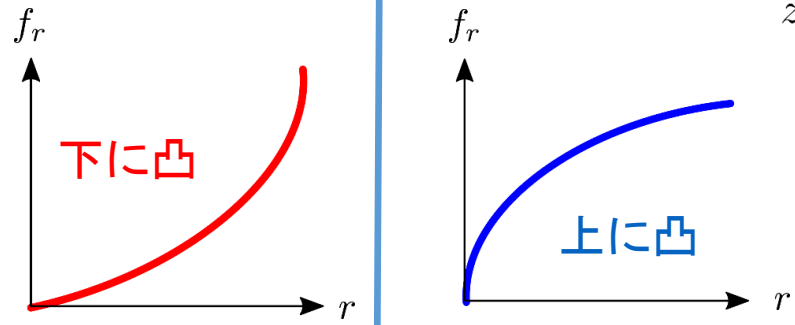
径方向 :  $\Phi 2 \text{ mm}$  一様分布  
 長手方向 :  $40 \text{ A/cm}^2$  一様な連続ビーム  
 初期熱エミッタンス :  $0 \text{ } \pi\text{mm mrad}$   
 理想的な平面カソード  
 カソード鏡像効果を考慮  
 一様電界  $5 \text{ MV/m}$  で引き出して加速し続ける

## 理想的平面カソードからの連続ビーム

## 位相空間分布

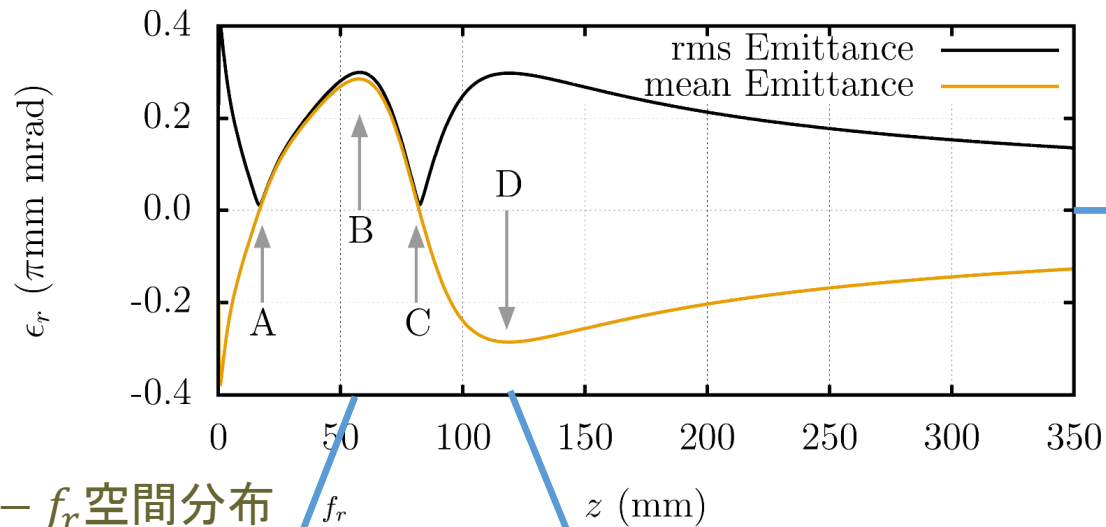
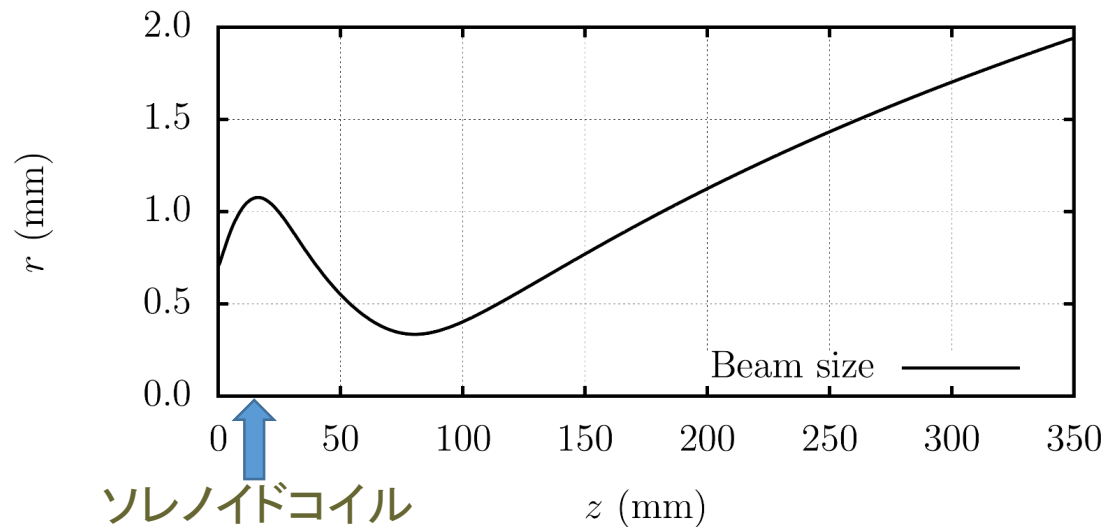


## $r - f_r$ 空間分布

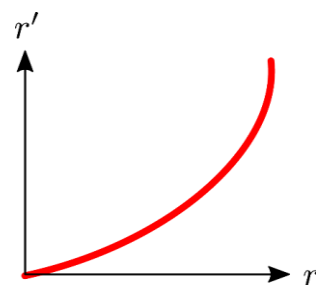
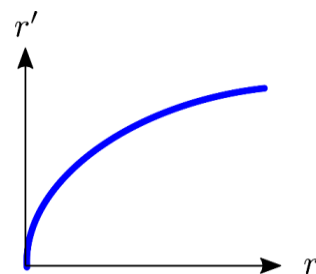


- meanエミッタンス増減のメカニズムは、rmsエミッタンスの増減に比べて理解しやすい。
- meanエミッタンスの絶対値が、ほぼ、rmsエミッタンスに等しいため、meanエミッタンスはrmsエミッタンスの増減の程度を定量的に表すものと考えることが出来る。

理想的平面カソードからの連続ビームをソレノイドコイルで集束  
 ビーム集束による空間電荷効果の変化に起因するエミッタンス低減現象

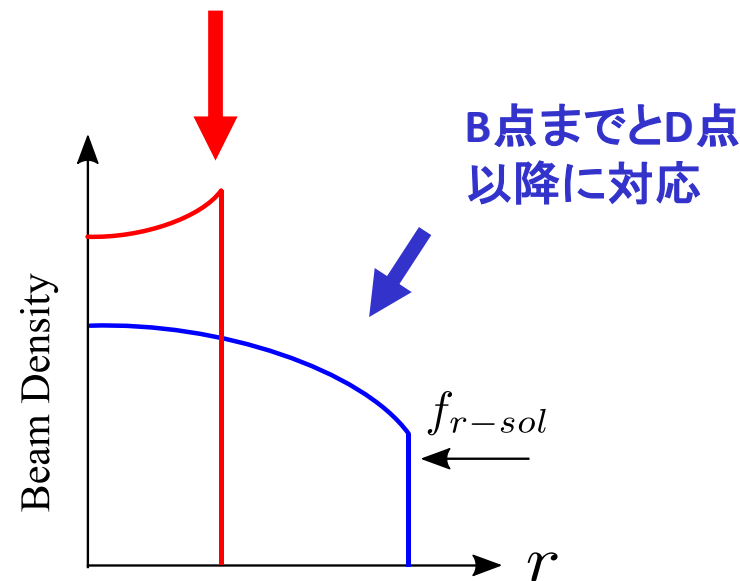


位相空間分布

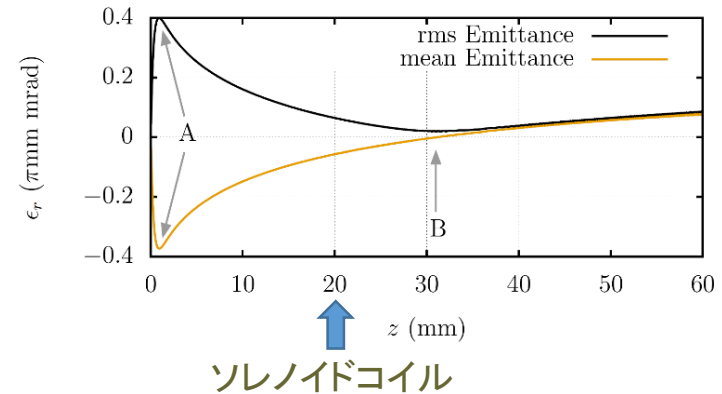


線形ソレノイド磁場でのビーム集束

BD間に対応  
 ( $r < 0.5$  mm)



BD間  $\Rightarrow$   $r - f_r$  空間分布が下に凸

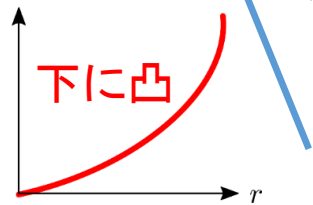


$r - f_r$  空間分布

上に凸

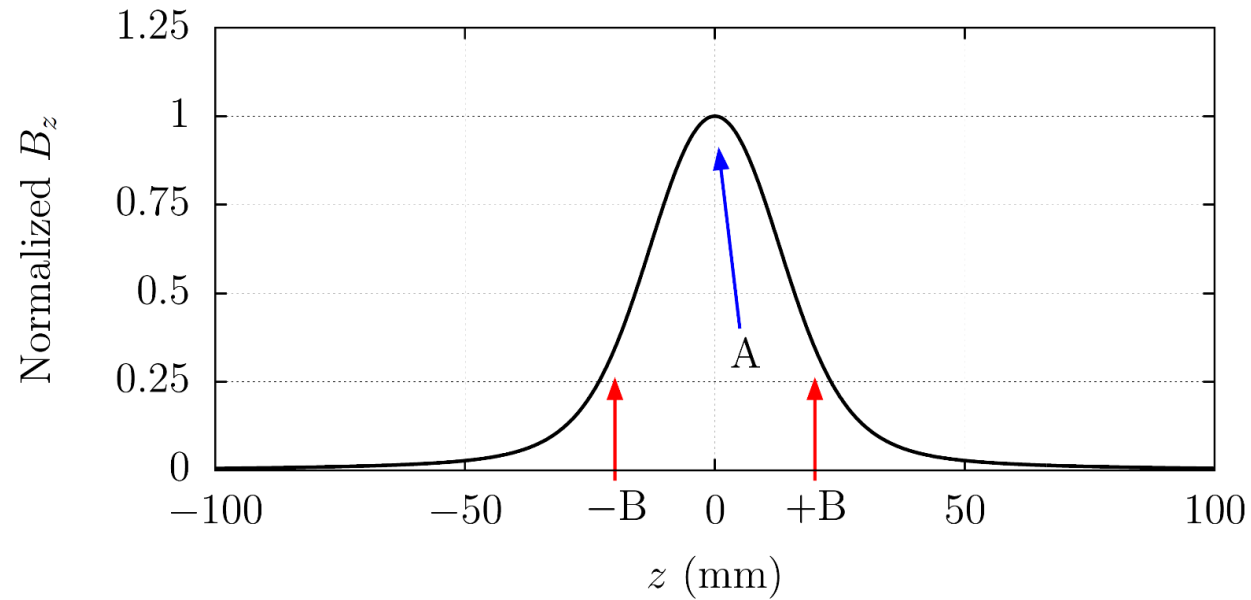
下に凸

上に凸

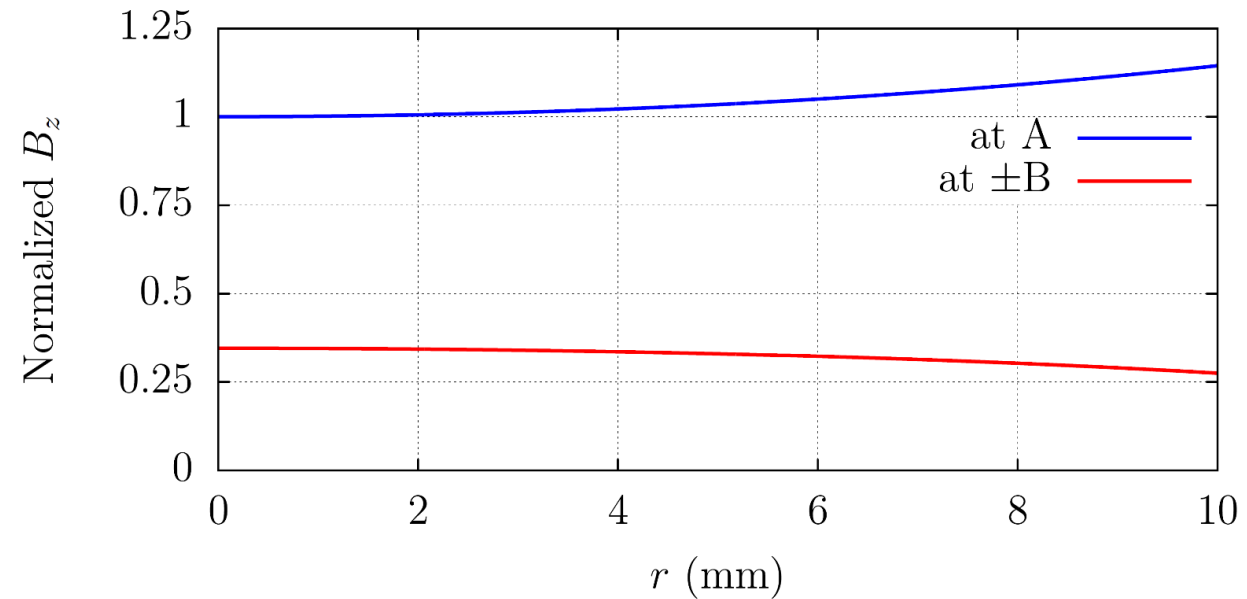


# ソレノイドコイルの非線形性

ビーム軸に沿ったソレノイド磁場、 $B_z$



ソレノイド中心、および両端部における $B_z$ の径方向依存性



$r - f_{r-sol}$ 空間分布

両端部( $\pm B$ ): 下に凸  
中央部( A): 上に凸



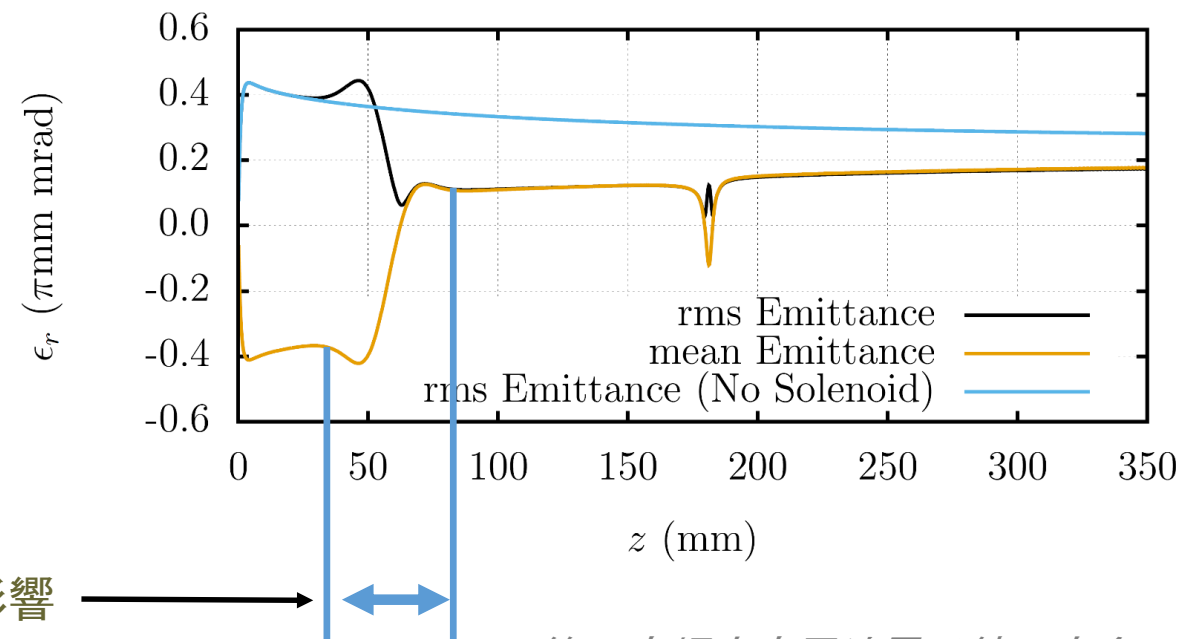
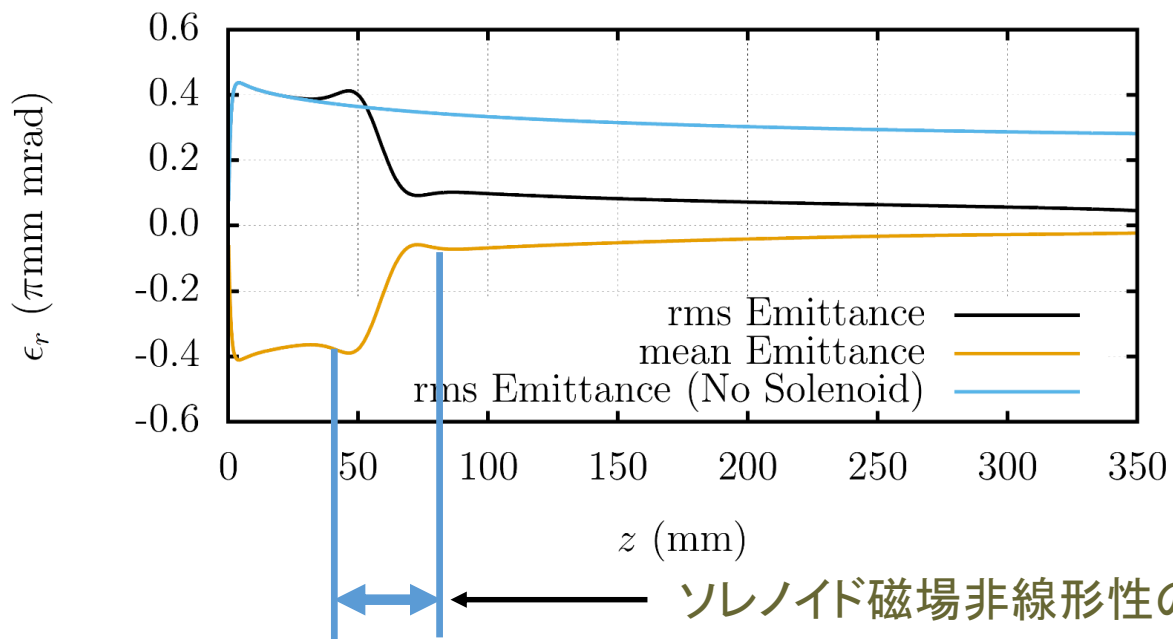
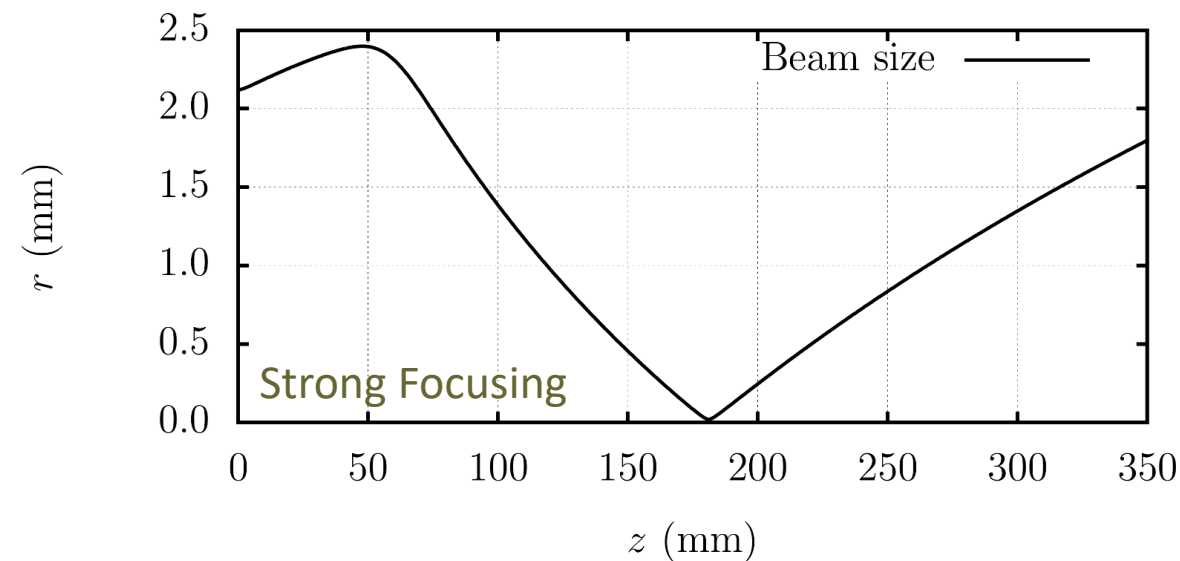
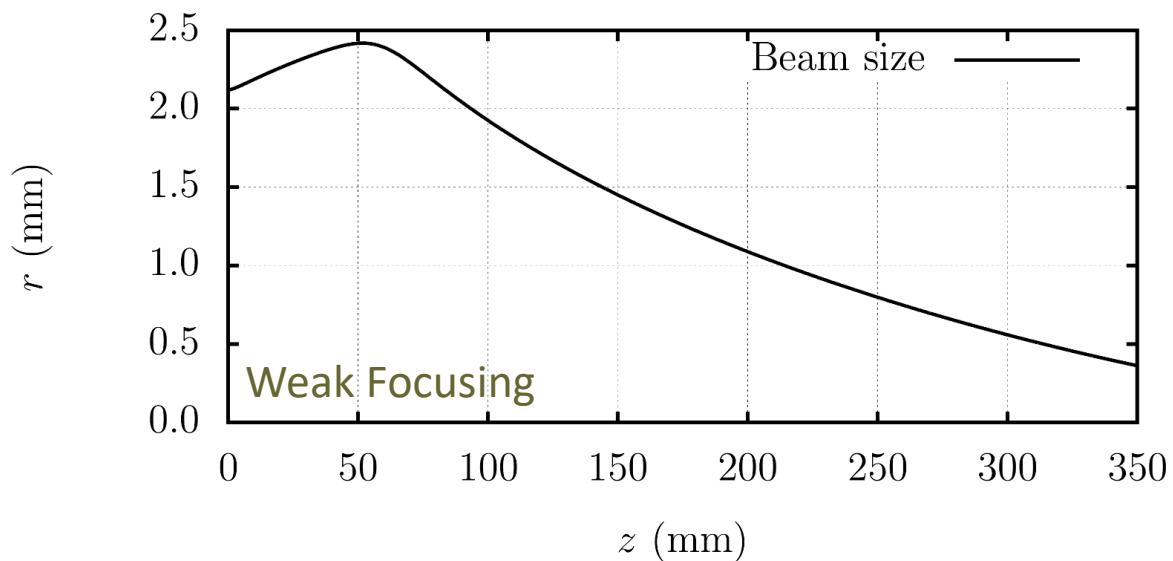
非線形性に起因したmeanエミッタンスの増減

入口で減少 中央部で増加 出口で減少

が現れるはず

# 連続ビームでのソレノイドコイル磁場非線形性によるエミッタンス低減現象

初期ビーム径  $\phi = 6 \text{ mm}$   $\leftarrow \phi 2 \text{ mm}$   
 ソレノイド中心  $z = 60 \text{ mm}$   $\leftarrow 20 \text{ mm}$

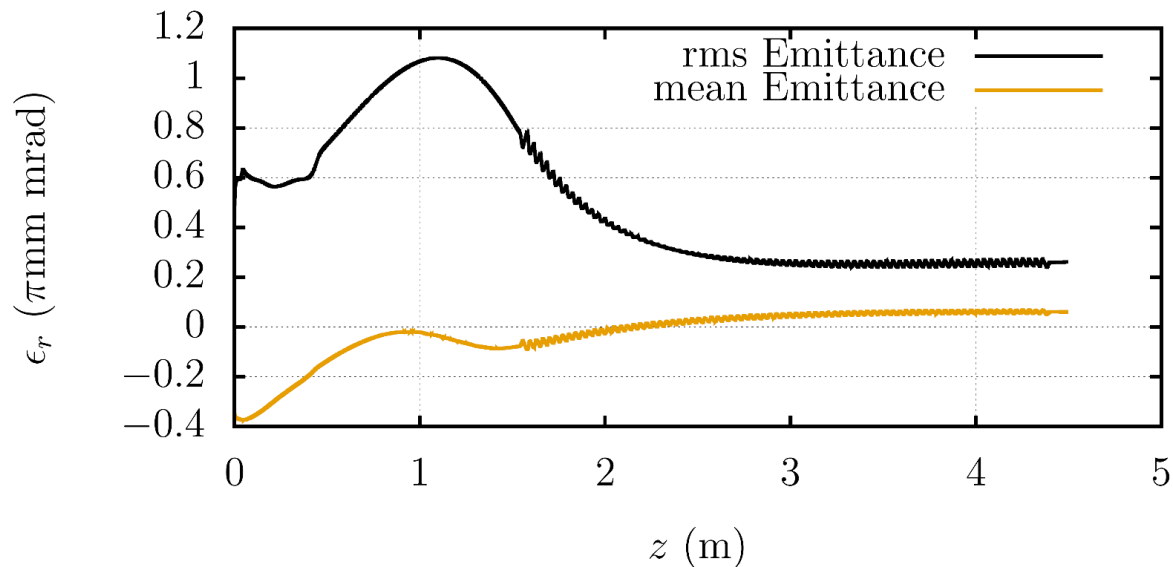


ソレノイド磁場非線形性の影響

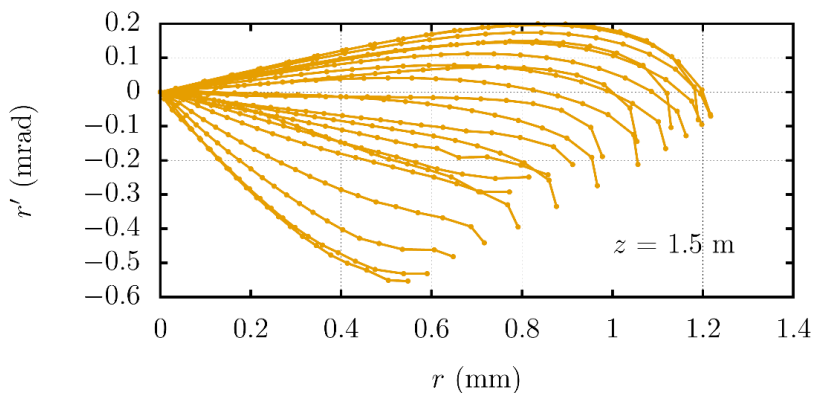
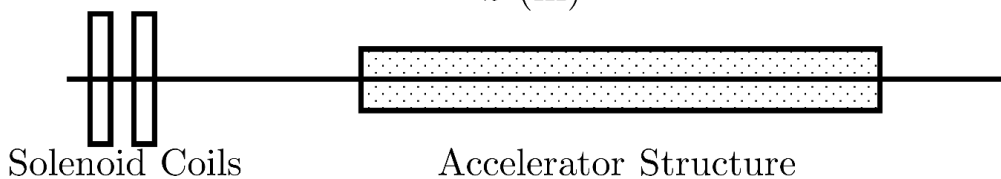
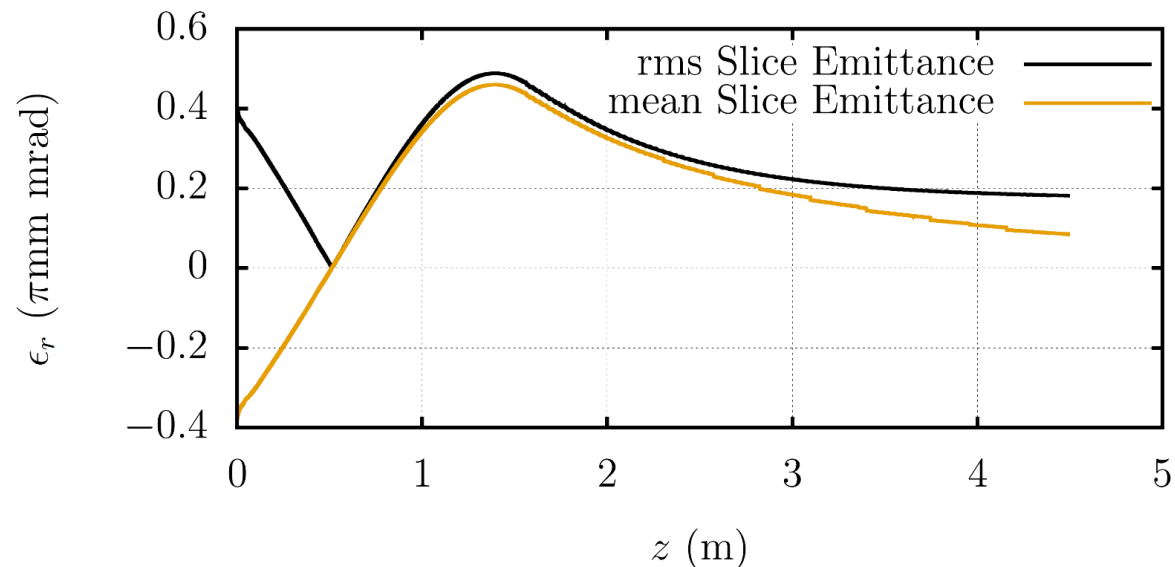
# パルスビームでのエミッタンス低減現象

(SPring-8 RF gun を用いてデザインした低エミッタンス電子源システム)

### バンチ全体の投影エミッタンス



### バンチ中央のスライスエミッタンス



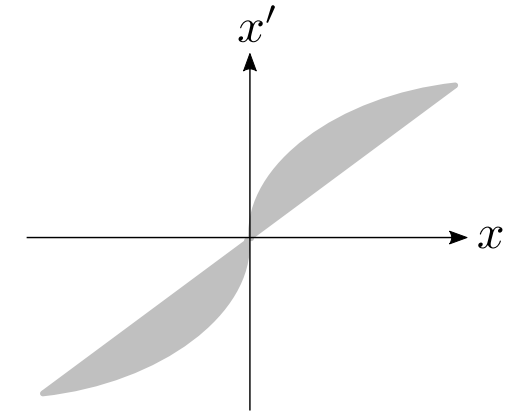
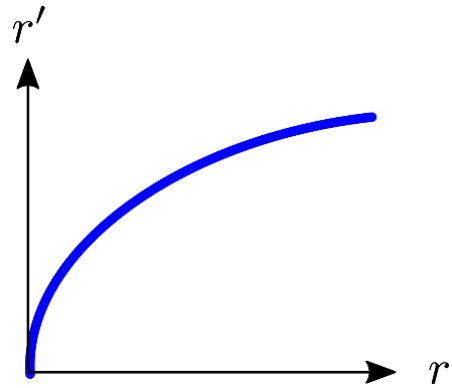
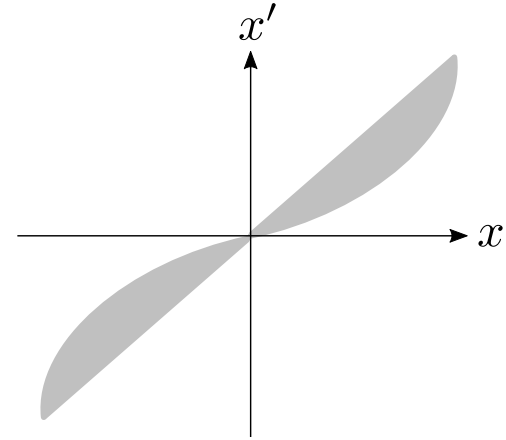
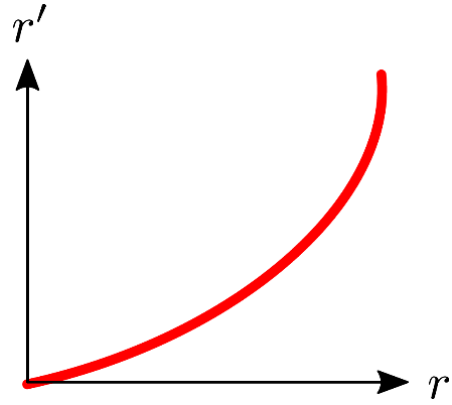
- Initial Charge: 50 pC/Bunch
- Laser Width: 9 ps uniform
- Laser Spot Size:  $\phi 1.4$  mm uniform
- Initial RF Phase:  $\sin 5^\circ$
- Max Electric Field on Cathode: 157 MV/m
- Energy at exit of Cavity: 3.6 MeV
- Energy at exit of Acc. Structure: 30.0 MeV
- Initial Emittance: 0 mrad

# Contents

1. エミッタンスリダクションの事例
2. エミッタンス低減現象を定量的に表す新指標について
3. 新指標で表現したエミッタンス低減現象の例
  - 理想的DCビームでのエミッタンス低減
  - ソレノイドコイルによるエミッタンス低減
  - パルスビームでのエミッタンス低減
4. 非軸対称ビームのエミッタンス低減について
5. シミュレーションコードの精度の問題
6. まとめ



## $r$ エミッタンスと $x$ エミッタンス

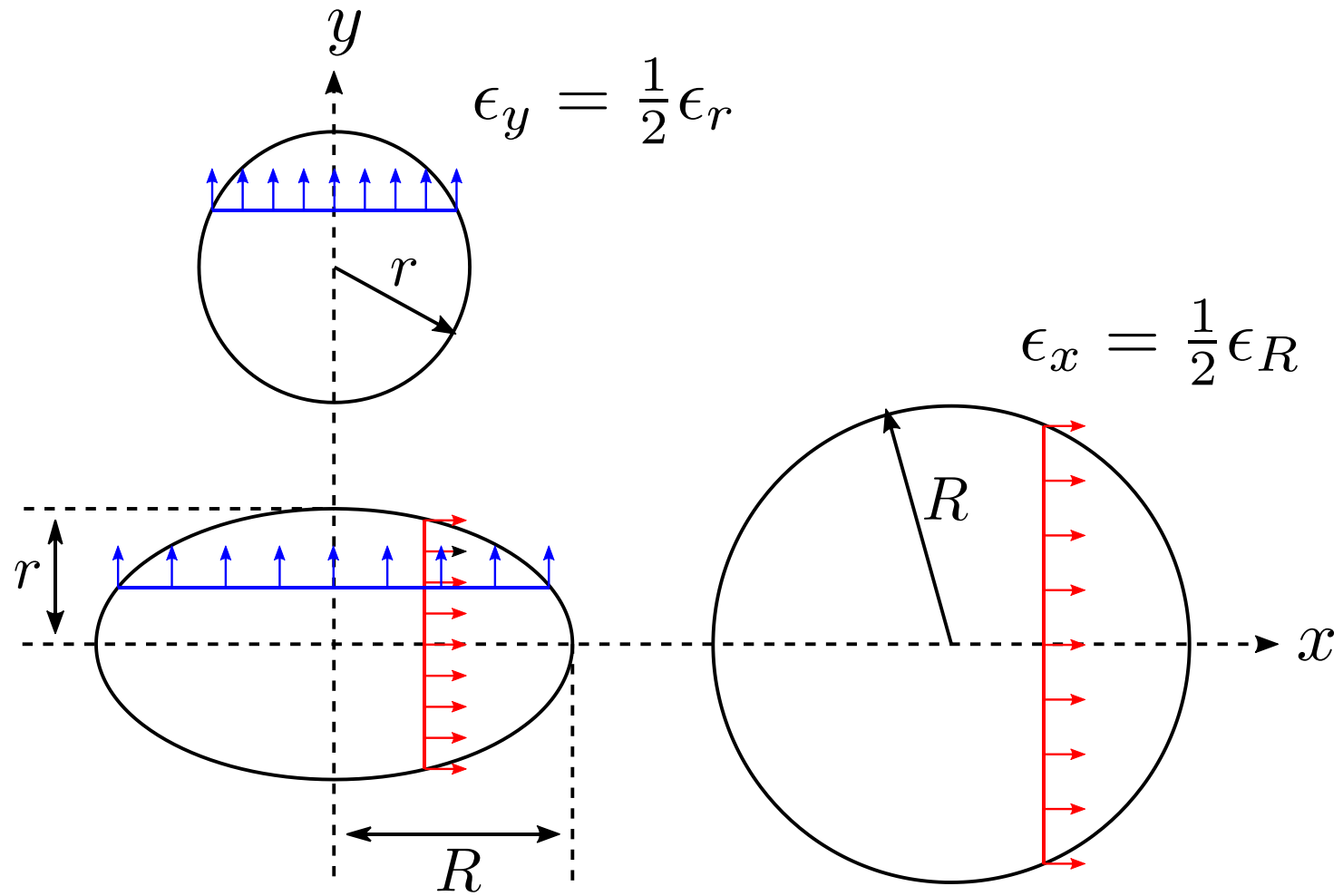


- meanエミッタンスによるSの正負は、 $x$ エミッタンスでは定義できない
- 軸対称ビームでは  $\varepsilon_x = 1/2 \varepsilon_r$  であることから、 $x$ エミッタンスをmeanエミッタンスで表現することは可能



非軸対称ビームではどうか？

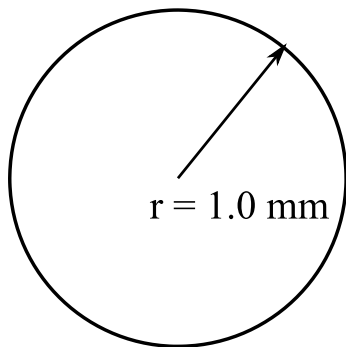
均一密度分布の楕円ビームであれば  $x$  エミッタンスは  $r$  エミッタンスに帰着できる



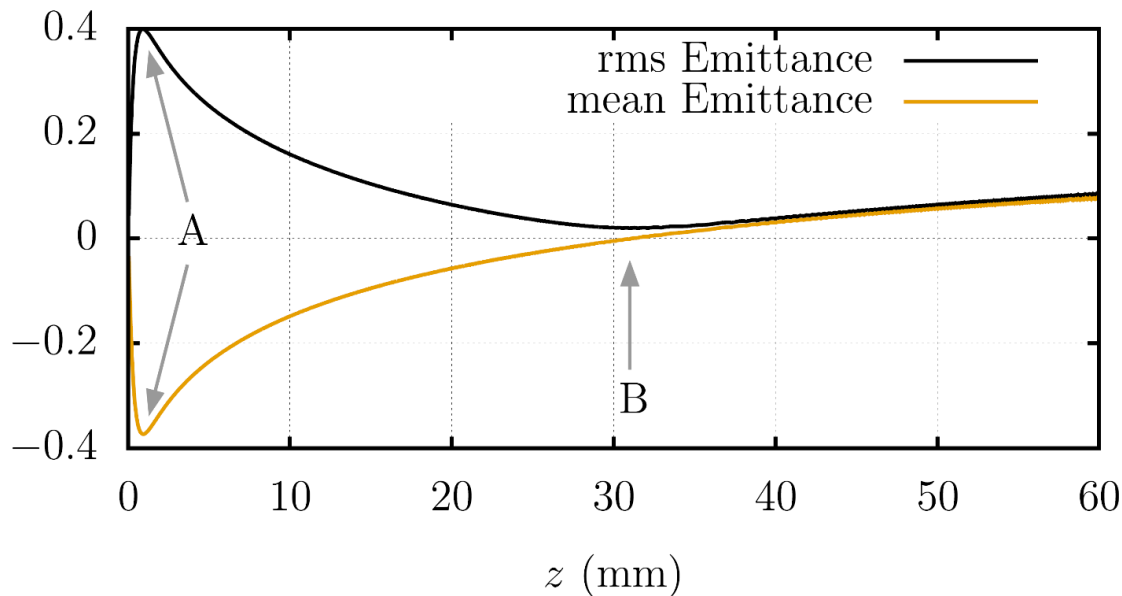
# 理想的平面カソードからの連続ビームでの例

初期ビーム形状

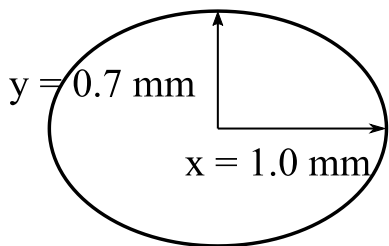
軸対称ビーム



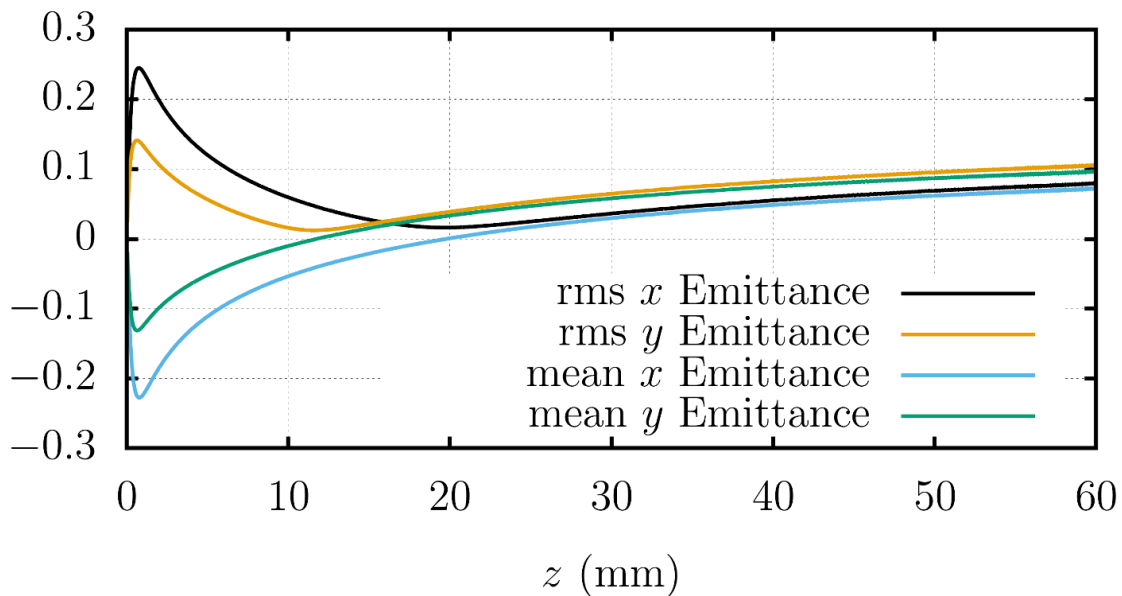
$\epsilon_r$  ( $\pi\text{mm mrad}$ )



非軸対称ビーム



$\epsilon$  ( $\pi\text{mm mrad}$ )



四極電磁石  $\Rightarrow$  楕円ビーム

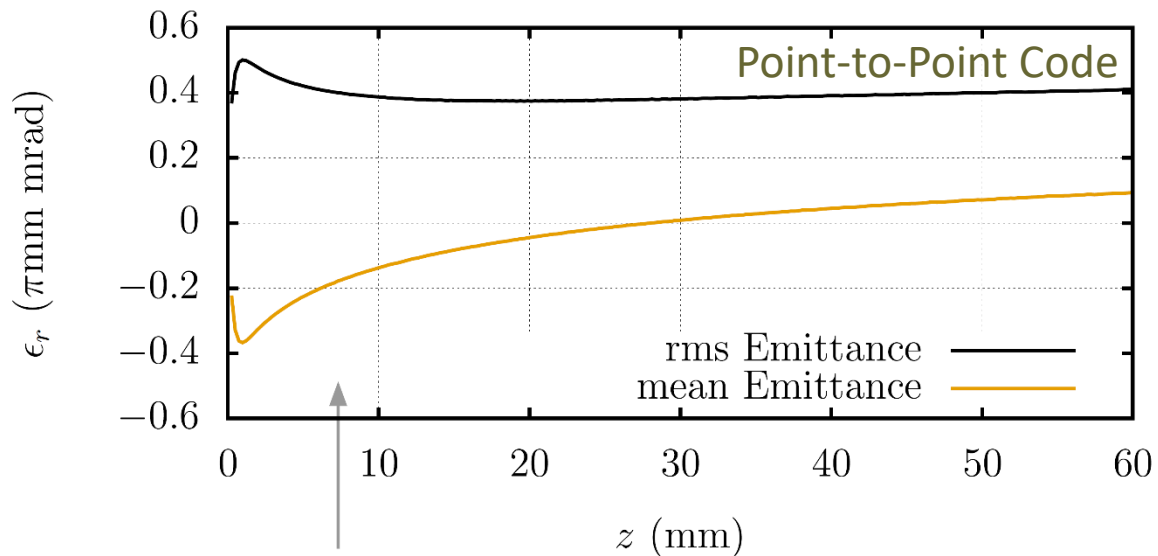
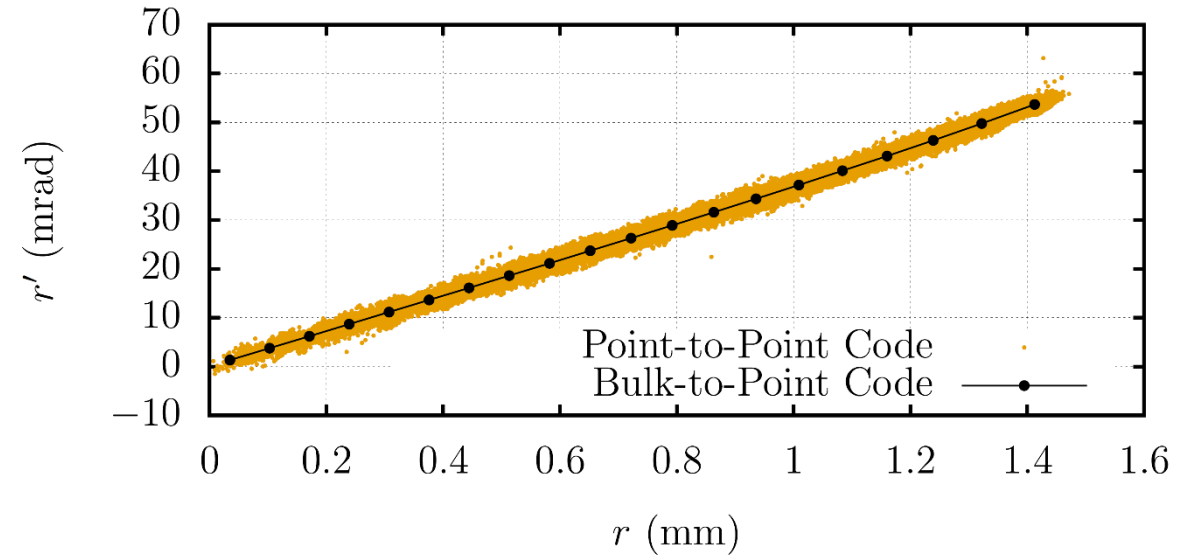
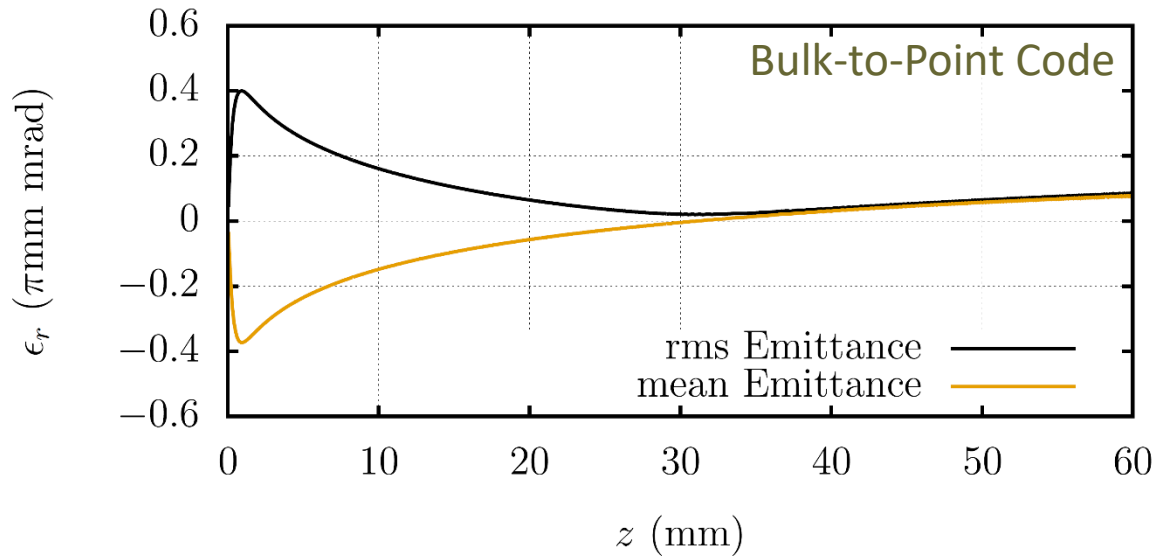
空間電荷効果: 厳密には楕円ビームではない

# Contents

1. エミッタンスリダクションの事例
2. エミッタンス低減現象を定量的に表す新指標について
3. 新指標で表現したエミッタンス低減現象の例
  - 理想的DCビームでのエミッタンス低減
  - ソレノイドコイルによるエミッタンス低減
  - パルスビームでのエミッタンス低減
4. 非軸対称ビームのエミッタンス低減について
5. シミュレーションコードの精度の問題
6. まとめ

# シミュレーションコードの精度による $r - r'$ 位相空間分布の違いとエミッタンスの計算精度

## 理想的平面カソードからの連続ビームでの例



精度の良い計算 (Bulk-to-Point Code):  
 $r - r'$ 位相空間上分布が曲線になる

精度の悪い計算 (Point-to-Point Code):  
 $r - r'$ 位相空間上分布が幅を持つ

➡ エミッタンス低減現象の解析には精度良い計算が不可欠

## まとめ

- エミッタンス低減現象を定量的に表すことのできる指標として mean エミッタンスを提案した。
- mean エミッタンスは、rms エミッタンスの概念を拡張したものであり、次のような特徴がある。
  - 位相空間分布が下に凸の場合 : 負
  - 位相空間分布が上に凸の場合 : 正
  - 下に凸の力が作用する場合 : 減少
  - 上に凸の力が作用する場合 : 増加
- mean エミッタンスの絶対値は、ほぼ rms エミッタンスに一致するため、エミッタンスの増減を定量的に表現することが出来る。
- mean エミッタンスによって、エミッタンス低減現象を分かり易く記述できることを示した。
- ソレノイドコイルによるエミッタンス低減について、空間電荷効果によるものと、ソレノイド磁場の非線形性によるものがあることを示した。

A.Mizuno, "エミッタンス低減現象を定量的に表す新指標の提案",  
第16回日本加速器学会年会プロシーディングス p.434-438, 京都, 2019年7月