QCD θ 項の 2-loop 輻射補正

坂野 達哉　(名古屋大)

共同研究者: 久野純治 北原鉄平 長村尚弘

arXiv:2311.07817

Flavor Physics Workshop 2023
2023/11/24

Introduction

QCD θ 項

QCD における P と $CP(= T)$ の破れ

$$\mathcal{L}_{CPV} = -|m_q|\bar{q}\left[\exp(i\theta_q)P_R + \exp(-i\theta_q)P_L\right]q + \theta_G \frac{\alpha_s}{8\pi} G\tilde{G}$$

chiral 回転 : $q \ \to \exp[i\theta_q \gamma_5 / 2] q$ を施すと

$$\mathcal{L}_{CPV} = -|m_q|\bar{q}q + (\theta_G - \theta_q)\frac{\alpha_s}{8\pi} G\tilde{G}$$

$\bar{\theta} := \theta_G - \theta_q$ は chiral rot. に依らない観測量（Fujikawa method）

強い CP 問題

素粒子標準模型の CP の破れ → quark の位相

CKM 行列の位相 [PDG]

$$\delta_{\rm CKM} \simeq 1.144$$

QCD θ 項 [C. Abel, et al. Phys. Rev. Lett. 124 (2020)]

$$\bar{\theta} \lesssim 10^{-10}$$

強い CP 問題：$\delta_{\rm CKM} \gg \bar{\theta}$?

強い CP 問題の解

- Peccei-Quin 機構 + axion → 今回扱わない
- P/CP を自発的に破る模型

1. Left-right model ($\cancel{P}$)
2. Nelson-Barr model ($\cancel{CP}$)

tree level の $\bar{\theta}$ は P/CP 対称性によって禁止, 輻射補正で出る

$$\bar{\theta} = \cancel{\bar{\theta}}_{tree} + \delta\bar{\theta}$$

概要

目標：$\delta\bar{\theta}$ を正しく評価 → 模型の制限

方法：

1. 従来の方法：Fujikawa method（quark 質量の位相のみで評価）
2. 新しい方法：Feynman diagram による評価 [J. Hisano, et al. JHEP 03 (2023)]
   Fujikawa method では評価できなかった寄与も含む

課題：

- 新しい方法を用いた LR model での 2-loop 計算では exact に $\delta\theta = 0$
  → 質量の位相以外の寄与も評価できているのか?
- 質量の位相以外の寄与があったとしてどの程度 $\delta\theta$ 効くのか

概要

本研究で調べたこと

- CPV Yukawa を含む simplified model で 2-loop diagram を直接計算し質量の位相以外の寄与が出ることを確かめた
- Fujikawa method ではなく diagramatical な方法を使うべき場合を明らかにした

$\Rightarrow$ diagramatical な $\bar{\theta}$ の評価方法の整理

1-loop calculations

review : low-energy EFT

次元 5 までの演算子を含む quark 有効理論（1-flavor, $\theta_G = 0$）

$$\mathcal{L}_{\rm eff} = \bar{q}\left[i\not{D} - \left(m_q^* P_L + m_q P_R\right)\right]q - \frac{1}{2}g_s \mu_q \bar{q}(\sigma\cdot G)q - \frac{i}{2}g_s d_q \bar{q}(\sigma\cdot G)\gamma_5 q$$

$$\Updownarrow \text{ chiral rot.}$$

$$\mathcal{L}_{\rm physical} = \bar{q}\left(i\not{D} - |m_q|\right)q - \frac{1}{2}g_s \tilde{\mu}_q \bar{q}(\sigma\cdot G)q - \frac{i}{2}g_s \tilde{d}_q \bar{q}(\sigma\cdot G)\gamma_5 q - \theta_q \frac{\alpha_s}{8\pi}G\tilde{G}$$

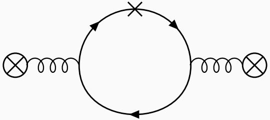
$\tilde{\mu}_q,\ \tilde{d}_q$: quark-gluon の異常 磁気/電気 双極子能率

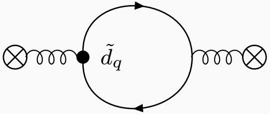
CP の破れ : 質量の位相（$\arg m_q$）, chromo EDM（$\tilde{d}_q$）

EFT における $\bar{\theta}$ への 1-loop の寄与は？

→ 背景 gluon 場の下での汎函数行列式を用いた計算が便利（operator Schwinger method）

operator Schwinger method





$$\Delta S = -i\,\mathrm{Tr}\log\left[\not{P} - (m_q^* P_L + m_q P_R)\right]$$
$$= -\theta_q \int \mathrm{d}^4x\, \frac{\alpha_s}{8\pi} G\tilde{G} + \cdots$$

$$\Delta S = -i\,\mathrm{Tr}\log\left[\not{P} - |m| - \frac{i}{2} g_s \tilde{d}_q (\sigma\cdot G)\gamma_5\right]$$
$$= -2|m_q|\tilde{d}_q \log\frac{|m_q|^2}{\mu^2} \int \mathrm{d}^4x\, \frac{\alpha_s}{8\pi} G\tilde{G} + \cdots$$

(μ は繰り込み点)

$$\bar{\theta} = -\theta_q - 2|m_q|\tilde{d}_q \log\frac{|m_q|^2}{\mu^2}$$

1-loop まとめ

Feynman diagram を用いて $\bar{\theta}$ を評価した : $\bar{\theta} = -\theta_q - 2|m_q|\tilde{d}_q \log \frac{|m_q|^2}{\mu^2}$

- 質量の位相 → Fujikawa method と一致
- chromo EDM（$\tilde{d}_q$）の寄与→ RGE : $\mu \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\mu} = 4|m_q|\tilde{d}_q$ と consistent

[E. E. Jenkins, et al. JHEP 01 (2018)]

⇒　diagram を用いることで CEDM も含めて評価できる

欠点 : 2-loop 以上の計算は困難

⇒　新しい方法 : Fock-Schwinger gauge method

2-loop calculations

概略

CPV 相互作用を含む Full theory で $\delta\theta$ を diagramatical に評価したい

CPV Yukawa を含む toy model

$$-\mathcal{L} = \bar{q}\left(\mathrm{Re}[m_q] + i\,\mathrm{Im}[m_q]\gamma_5\right)q + \frac{1}{2}m_\phi^2\phi^2 + y_q\bar{q}P_R q\phi + y_q^*\bar{q}P_L q\phi$$

仮定：$\mathrm{Im}[m_q] \ll \mathrm{Re}[m_q],\ \Lambda_{\mathrm{QCD}} \ll |m_q|,\ m_q \ll m_\phi$

2 通りの方法で整合するか確かめる

- Full theory → light quark EFT → $\delta\theta$
- Full theory → $\delta\theta$ （Fock-Schwinger gauge method）

light quark EFT

ϕ を積分して軽い quark の EFT を考えると, 次元 6 までの CPV 演算子は

$$-\mathcal{L} = \bar{q}\left(\mathrm{Re}[m_q] + i\,\mathrm{Im}[m_q]\gamma_5\right)q + \frac{1}{2}m_\phi^2\phi^2 + y_q\bar{q}P_R q\phi + \mathrm{h.c.}$$

$\Downarrow \quad \phi$ を積分, $\mu \sim m_\phi$

$$-\mathcal{L}_{\mathrm{eff}} = \bar{q}i\,\mathrm{Im}[m_q + \Delta m_q]\gamma_5 q + \frac{i}{2}g_s\tilde{d}_q\bar{q}\sigma^{\mu\nu}\gamma_5 G_{\mu\nu}q - C_4^q(\bar{q}q)(\bar{q}i\gamma_5 q)$$
$$- \cancel{C_5^q(\bar{q}\sigma^{\mu\nu}q)(\bar{q}i\sigma_{\mu\nu}\gamma_5 q)} + \Delta\theta_{\mathrm{th}}\frac{\alpha_s}{8\pi}G^a_{\mu\nu}\tilde{G}^{a\mu\nu} + \cancel{\frac{1}{3}\omega f^{abc}G^a_{\mu\nu}G^{b\nu}_{\rho}\tilde{G}^{c\rho\mu}}$$

$$\Delta m_q = -\frac{\mathrm{Im}[y_q^2]}{16\pi^2}\mathrm{Re}[m_q]\left[1 + \log\frac{\mu^2}{m_\phi^2} + \frac{m_q^2}{m_\phi^2}\log\frac{m_q^2}{m_\phi^2}\right], \quad C_4^q = \frac{\mathrm{Im}[y_q^2]}{2m_\phi^2}, \quad \tilde{d}_q = -\frac{\mathrm{Im}[y_q^2]}{16\pi^2}\frac{3\,\mathrm{Re}[m_q]}{2m_\phi^2}$$

C_5^q, ω は高次の寄与なので無視する

light quark EFT

4-fermi（C_4^q）と CEDM（$\tilde{d}_q$）は RGE を通して混ざる [J. Hisano, et al. Phys. Lett. B 713 (2012)]

$$\mu \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu} \tilde{d}_q(\mu) = \frac{4 m_q}{(4\pi)^2} C_4^q$$
$$\tilde{d}_q(\mu) = -\frac{\mathrm{Im}[y_q^2]}{16\pi^2} \frac{\mathrm{Re}[m_q]}{m_\phi^2} \left[\frac{3}{2} + \log \frac{\mu^2}{m_\phi^2} \right]$$

EFT での $G\tilde{G}$ への寄与は

$$\delta\theta_{\mathrm{EFT}} = -\frac{\mathrm{Im}[m_q + \Delta m_q]}{\mathrm{Re}[m_q]} - 2 \int_{\log m_\phi^2}^{\log m_q^2} \mathrm{Re}[m_q] \tilde{d}_q(\mu) \, \mathrm{d} \log \mu^2 + \Delta\theta_{\mathrm{th}}$$

新しい方法（Fock-Schwinger gauge method）ではどうか?

Fock-Schwinger gauge method

Fock-Schwinger gauge : $(x - x_0)^\mu A_\mu(x) = 0$

- 並進対称性（=運動量保存）を破る ⇒　全微分項を扱える

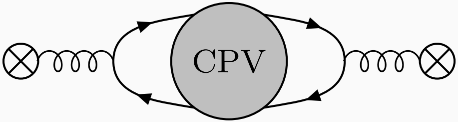
$$G\tilde{G} \propto \partial \left[A\partial A + \frac{2}{3} A^3 \right]$$

- gauge 不変な量なら並進対称性が回復

  [S. N. Nikolaev, A.V. Radyushkin, Phys. Lett. B 110 (1982), Nucl. Phys. B 213 (1983)]

- $A_\mu(q) = -\frac{i(2\pi)^4}{2} G_{\nu\mu}(0) \frac{\partial}{\partial q_\nu} \delta^{(4)}(q) + \cdots$

$G\tilde{G}$ への寄与 = FS gauge を取った背景 gluon 場の下で評価した quark の babble diagram

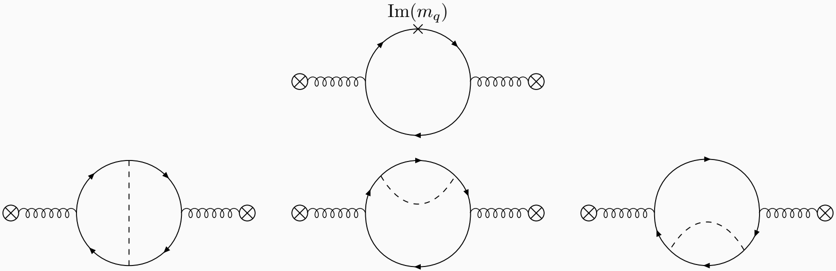


Simplified model

Full lagrangian

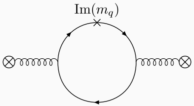
$$-\mathcal{L} = \bar{q}\left(\mathrm{Re}[m_q] + i\,\mathrm{Im}[m_q]\gamma_5\right) q + \frac{1}{2}m_\phi^2\phi^2 + y_q\bar{q}P_R q\phi + y_q^*\bar{q}P_L q\phi$$

$G\tilde{G}$ に寄与する diagram $\Rightarrow$ Fock-Schwinger gauge method で評価

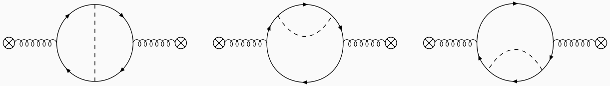


diagramatical な評価

$m_q \ll m_\phi$ での diagram による直接計算：$\delta\theta_{\rm FS} = \delta\theta_{1L} + \delta\theta_{2L}$



$$\delta\theta_{1L} = -\frac{\mathrm{Im}[m_q]}{\mathrm{Re}[m_q]}$$



$$\delta\theta_{2L} = \frac{\mathrm{Im}[y_q^2]}{16\pi^2}\mathrm{Re}[m_q]^2\left[\frac{1}{m_q^2}\left(1+\log\frac{\mu^2}{m_\phi^2}\right)+\frac{1}{3m_\phi^2}\left(\pi^2+12\log\frac{m_q^2}{m_\phi^2}+3\log^2\frac{m_q^2}{m_\phi^2}\right)\right]$$

FS method ⇔ EFT

diagramatical な輻射 θ の評価（FS method）と EFT の方法を比較すると

$$\delta\theta_{\mathrm{EFT}} = -\frac{\mathrm{Im}[m_q + \Delta m_q]}{\mathrm{Re}[m_q]} - 2\int_{\log m_\phi^2}^{\log m_q^2} \mathrm{Re}[m_q]\tilde{d}_q(\mu)\,\mathrm{d}\log\mu^2 + \Delta\theta_{\mathrm{th}}$$

$$\delta\theta_{\mathrm{FS}} = -\frac{\mathrm{Im}[m_q]}{\mathrm{Re}[m_q]} + \frac{\mathrm{Im}[y_q^2]}{16\pi^2}\left[1 + \log\frac{\mu^2}{m_\phi^2} + \frac{m_q^2}{m_\phi^2}\log\frac{m_q^2}{m_\phi^2}\right]$$

$$+\frac{\mathrm{Im}[y_q^2]}{16\pi^2}\frac{2m_q^2}{m_\phi^2}\left[\frac{3}{2}\log\frac{m_q^2}{m_\phi^2} + \frac{1}{2}\log^2\frac{m_q^2}{m_\phi^2}\right] + \frac{\mathrm{Im}[y_q^2]}{48}\frac{m_q^2}{m_\phi^2}$$

⇒ FS method は EFT の方法と consistent

FS method vs Fujikawa method

$m_q \ll m_\phi$ において $\delta\theta$ への主要な寄与は何か

$$\delta\theta_{\rm FS} = -\frac{\mathrm{Im}[m_q]}{\mathrm{Re}[m_q]} + \frac{\mathrm{Im}[y_q^2]}{16\pi^2}\left[1 + \log\frac{\mu^2}{m_\phi^2} + \frac{m_q^2}{m_\phi^2}\log\frac{m_q^2}{m_\phi^2}\right]$$
$$+ \frac{\mathrm{Im}[y_q^2]}{16\pi^2}\frac{2m_q^2}{m_\phi^2}\left[\frac{3}{2}\log\frac{m_q^2}{m_\phi^2} + \frac{1}{2}\log^2\frac{m_q^2}{m_\phi^2}\right] + \frac{\mathrm{Im}[y_q^2]}{48}\frac{m_q^2}{m_\phi^2}$$

2-loop からの寄与は（係数を無視して）

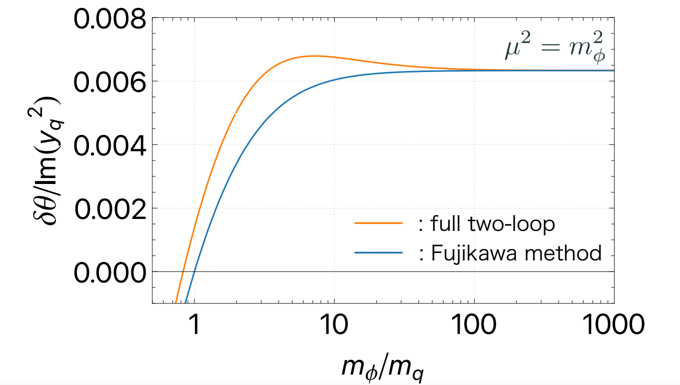
質量の位相 ~ 1 $\gg$ CEDM, $\Delta\theta_{\rm th} \sim m_q^2/m_\phi^2$

一方, Fujikawa method では $\delta\theta = -\,\mathrm{Im}[m_q + \Delta m_q]/\,\mathrm{Re}[m_q]$

$m_q \ll m_\phi$ では Fujikawa method で問題なさそう, $m_q \sim m_\phi$ ではどうか？

数値計算

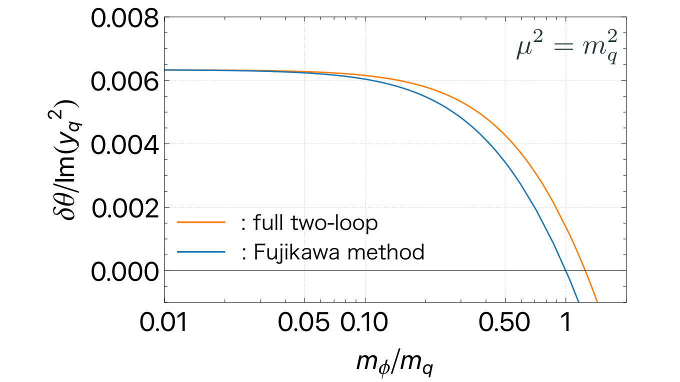
$m_q \lesssim m_\phi$ での diagram 計算の解析解の振る舞いを調べると



$m_\phi/m_q \lesssim 10$ では Fock-Schwinger gauge method で評価すべき

数値計算

一方, quark が重い場合 ($m_\phi < m_q$)

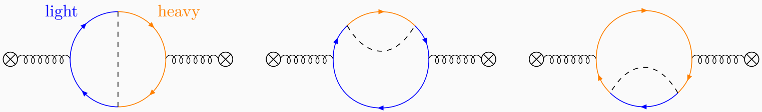


Fujikawa method は良い近似になっている

$m_\phi \ll m_q$ での一致は偶然（EFT としての解釈も無いため）

2-flavor case

light quark (q_l) と heavy quark (q_h) を含み, Yukawa の非対角成分で CP を破る場合



quark の質量に階層性があるとき（$m_l \ll m_h \sim m_\phi$）2-loop diagram からの寄与は

- 質量の位相 : $\Delta m_l \sim \frac{m_h}{m_l}, \quad \Delta m_h \sim \frac{m_l}{m_h}$
- CEDM, $\Delta\theta_{th} \sim \frac{m_l m_h}{m_\phi^2}$

$\Rightarrow$ 最も軽い quark の質量の位相からの寄与が支配的

Nelson-Barr

Nelson-Barr model

minimal BBP model (+ real scalar S)

[L. Bento et al. Phys. Lett. B 267 (1991)]

	chirality	$SU(3)_C$	$SU(2)_L$	$U(1)_Y$	$\mathbb{Z}_N$
Q	L	$\mathbf{3}$	$\mathbf{2}$	$1/6$	0
u	R	$\mathbf{3}$	$\mathbf{1}$	$2/3$	0
d	R	$\mathbf{3}$	$\mathbf{1}$	$-1/3$	0
H	–	$\mathbf{1}$	$\mathbf{2}$	$1/2$	0
ψ	L	$\mathbf{3}$	$\mathbf{1}$	$-1/3$	k
ψ^c	R	$\mathbf{3}$	$\mathbf{1}$	$-1/3$	k
Σ_a	–	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	0	k
S	–	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	0	0

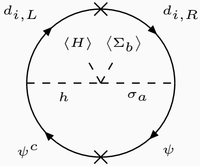
$$
\begin{aligned}
-\mathcal{L}_Y^d &= y_u^{ij}\tilde{H}\bar{Q}_i u_j + y_d^{ij} H\bar{Q}_i d_j \\
&\quad + g^{ai}\Sigma_a\bar{\psi}_L d_i + f S\bar{\psi}\psi^c + \text{h.c.}
\end{aligned}
$$

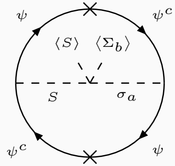
$$
V(\Sigma_a, H) = \gamma_{ab}\Sigma_a^*\Sigma_b|H|^2 + \frac{1}{2}\tilde{\gamma}_{ab}\Sigma_a^*\Sigma_b S^2
$$

- Σ^a の相対位相 → CP の破れ
- $f\langle S\rangle$ で ψ の質量を与える

$\delta\theta$ への寄与

$$\delta\theta = \Delta\theta_\Sigma + \Delta\theta_S$$





$$\Delta\theta_\Sigma \sim \frac{\langle\Sigma\rangle^2}{m_\Sigma^2}$$

軽い quark 質量の寄与（$\frac{1}{m_d}$）はない

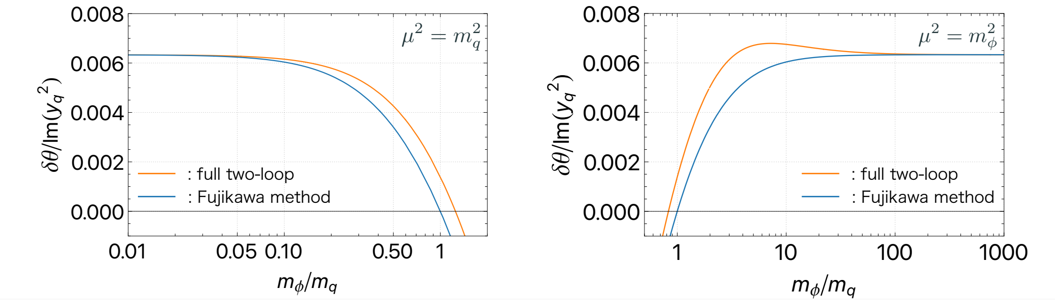
$$\Delta\theta_S \sim \frac{\langle\Sigma\rangle^2}{m_S^2 - m_\Sigma^2} \cdot \frac{\langle S\rangle}{m_\psi} \sim \frac{\langle\Sigma\rangle^2}{m_S^2 - m_\Sigma^2}$$

重い粒子のみ含む（階層性：小）

$\Rightarrow$ Fujikawa method では不十分

まとめ

- Fock-Schwinger gauge method を用いた 2-loop 計算で $\bar{\theta}$ を評価
  - quark 質量の位相以外の $\bar{\theta}$ への寄与も含む（ex. chromo EDM）
  - FS method は EFT の方法と consistent
- 質量の階層性が小さい場合は FS method を使うべき



Backup

physical CMDM/CEDM

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \bar{q}\left[i\not{D} - \left(m_q^* P_L + m_q P_R\right)\right] q - \frac{1}{2} g_s \mu_q \bar{q}(\sigma \cdot G) q - \frac{i}{2} g_s d_q \bar{q}(\sigma \cdot G)\gamma_5 q$$

$$\Updownarrow \text{ chiral rot.}$$

$$\mathcal{L}_{\text{physical}} = \bar{q}\left(i\not{D} - |m_q|\right) q - \frac{1}{2} g_s \tilde{\mu}_q \bar{q}(\sigma \cdot G) q - \frac{i}{2} g_s \tilde{d}_q \bar{q}(\sigma \cdot G)\gamma_5 q - \theta_q \frac{\alpha_s}{8\pi} G\tilde{G}$$

物理的な（基底に依らない）chromo MDM/EDM

$$\tilde{\mu}_q = \mu_q \cos\theta_q + d_q \sin\theta_q$$
$$\tilde{d}_q = -\mu_q \sin\theta_q + d_q \cos\theta_q$$

Weinberg operator

$\mathrm{Im}(m_q)$ を含む 1-loop diagram からの Weinberg operator への寄与は

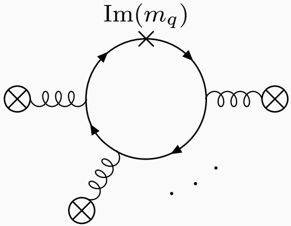
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}m_q}\Delta S \supset \mathrm{tr}\left[\left\{\frac{1}{p^2-|m_q|}\left(\frac{1}{2}g_s(\sigma\cdot G)\right)\right\}^3\frac{1}{p^2-|m_q|}m_q^* P_R\right]$$

$$\supset i\int \mathrm{d}^4x\,\frac{c}{m_q|m_q|^2}G\tilde{G} \qquad (c: \text{適当な実係数})$$

m_q で積分すれば $\Delta S \supset -i\int \mathrm{d}^4x\,\frac{c}{|m_q|}G\tilde{G}$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}m_q} \to \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}m_q^*}$ も考えると

$$\Delta S \supset i\int \mathrm{d}^4x\left[\frac{c}{|m_q|}-\frac{c}{|m_q|}\right]G\tilde{G} = 0$$

実は $G\tilde{G}$ より高次の gluon CPV 演算子は 1-loop で現れない



$= 0$

BBP model 詳細

BBP model + real scalar

$$-\mathcal{L}_Y^d = y_u^{ij}\tilde{H}\bar{Q}_i u_j + y_d^{ij} H\bar{Q}_i d_j + g^{ai}\Sigma_a \bar{\psi}_L d_i + f S\bar{\psi}\psi^c + \mathrm{h.c.}$$

$$V(\Sigma_a, H) = \gamma_{ab}\Sigma_a^*\Sigma_b |H|^2 + \frac{1}{2}\tilde{\gamma}_{ab}\Sigma_a^*\Sigma_b S^2$$

$f\langle S\rangle := m,\ \xi^{*i} := g^{ai}\langle\Sigma_a\rangle,\ M^2 := m^2 + |\xi|^2$ として基底を取り替える

$$\begin{pmatrix} d_R \\ \psi^c \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 - \frac{\xi^i\xi^{*j}}{|\xi|^2}\left(1 - \frac{m}{M}\right) & \frac{\xi^i}{M} \\ -\frac{\xi^{*j}}{M} & \frac{m}{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_R \\ \psi^c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} d_L \\ \psi \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & Y\frac{\langle H\rangle}{M} \\ -Y^\dagger\frac{\langle H\rangle}{M} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_L \\ \psi \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ d, ψ の質量行列が $\langle H\rangle / M$ の 0 次では対角化される