標準理論入門（前編）

曺 基哲

お茶の水女子大学

Flavor Physics Workshop 2017, Oct/30/2017

予定

Day 1 (50 min.)

- QFT and Feynman rules
- Gauge symmetry
- Spontaneous symmetry breaking and Higgs mechanism

Day 2 (50 min.)

- Gauge boson mass, fermion mass and related issues
- Experimental status of the SM
- Fate of the SM

Standard Model

Glashow (1961) , Salam, Weinberg (1967)

SM …電磁相互作用、弱い相互作用、強い相互作用による
クォークやレプトンの振る舞いを説明するゲージ理論

質量の起源…ゲージ対称性の自発的破れ（ヒッグス機構）

お茶の水女子大学 Ochanomizu University

Particle Content

	クォーク			レプトン（電子とか）			ヒッグス粒子
電荷 +2/3	u アップ	c チャーム	t トップ	ν_e 電子ニュートリノ	ν_μ	ν_τ	電荷 0
電荷 -1/3	d ダウン	s ストレンジ	b ボトム	e 電子	μ ミューオン	τ タウ粒子	電荷 -1 H
	ゲージ粒子（力を伝える）						
	γ	$W^{\pm}$		Z^0	g		

お茶の水女子大学 Ochanomizu University

Particle Content

スピンで分類する

クォーク			レプトン（電子とか）			ヒッグス粒子
u spin 1/2	c チャーム	t トップ	ν_e 電子ニュートリノ	ν_μ	ν_τ	
d ダウン	s ストレンジ	b ボトム	e 電子	μ ミューオン	τ タウ粒子	H spin 0
ゲージ粒子（力を伝える）						
spin 1	γ	$W^{\pm}$	Z^0	g		

Equation of motion (EOM)

(s=0) Klein-Gordon eq.

$$\left(\partial_\mu \partial^\mu + m^2\right) \phi = 0$$

(s=1/2) Dirac eq.

$$\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m\right) \psi = 0$$

(s=1) Maxwell eq. (Proca eq.)

$$\left(\partial_\alpha \partial^\alpha + m^2\right) A^\mu = 0, \qquad \left(\partial_\mu A^\mu = 0\right)$$

EOM ↔ Lagrangian

action

$$S = \int dt\ L(q, \dot{q}) \qquad (L = T - V)$$

Lagrangian (density)

$$L = \int d^3x\ \mathcal{L} \to S = \int d^4x\ \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$$

Euler-Lagrange eq. (=EOM)

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$$

EOM ↔ Lagrangian

（脱線）Lagrangianの次元？

action $$S = \int dt\ L(q, \dot{q})$$ [energy] x [time]=[plank const.]

natural unit: $\hbar = c = 1$

$$S = \int d^4x\ \mathcal{L}$$ [dim.less]=[length^4] x [???]

[Lagrangian]=[1/length^4] or [mass^4]

お茶の水女子大学
Ochanomizu University

Lagrangian (free part = no int.)

(s=0) scalar

$$\mathcal{L} = (\partial^\mu \phi)^* (\partial_\mu \phi) - m^2 \phi^* \phi$$

(s=1/2) Dirac

$$\mathcal{L} = i\overline{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\overline{\psi}\psi$$

(s=1) vector

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2} A_\mu A^\mu \qquad (F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)$$

＊いずれも場の2次。微分を含むか否か

微分アリ：kinetic term

微分ナシ：mass term

お茶の水女子大学 Ochanomizu University

Lagrangian (free part = no int.)

（脱線）場の次元

(s=0) scalar

$$\mathcal{L} = (\partial^\mu \phi)^* (\partial_\mu \phi) - m^2 \phi^* \phi$$

(s=1/2) Dirac

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi$$

(s=1) vector

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2} A_\mu A^\mu \quad (F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)$$

微分を含む項に注目

[∂]=[1/length]=[mass]

[scalar]=[vector]=[mass]

[fermion] =[mass^(3/2)]

これまでfree partしか扱って

こなかった…

相互作用はどう決まる？

お茶の水女子大学
Ochanomizu University

相互作用をどう決める？

Lagrangian≒場の多項式と見てよいなら…

→手当たり次第（結果オーライ）

→何らかのルールを持ち出す（対称性、不変性）

例：β崩壊@フェルミ理論

β崩壊

$$n \to p\ e^-\ \overline{\nu_e}$$

クォーク・レベルだと

$$d \to u\ e^-\ \overline{\nu_e}$$

フェルミ理論→崩壊前後の場だけで記述。Lorentz不変性。

$$\mathcal{L}_{\rm int} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \overline{\psi}_u \Gamma^\mu \psi_d \overline{\psi}_e \Gamma_\mu \psi_\nu \qquad (\Gamma^\mu = \gamma^\mu (1-\gamma_5))$$

お茶の水女子大学 Ochanomizu University

Quantum Field Theory in a nutshell

「場」→生成・消滅演算子（運動量、スピン）

粒子を消滅＝反粒子を生成 (vice versa)

(s=0) $$\phi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\boldsymbol{k}}}\left(a_{\boldsymbol{k}}e^{-ikx} + b^\dagger_{\boldsymbol{k}}e^{ikx}\right)$$

(s=1/2) $$\psi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\boldsymbol{k}}}\left\{a_{\boldsymbol{k},s}u(k,s)e^{-ikx} + b^\dagger_{\boldsymbol{k},s}v(k,s)e^{ikx}\right\}$$

$$\overline{\psi}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\boldsymbol{k}}}\left\{a^\dagger_{\boldsymbol{k},s}\overline{u}(k,s)e^{+ikx} + b_{\boldsymbol{k},s}\overline{v}(k,s)e^{-ikx}\right\}$$

scalar $\otimes\, u, v$

(s=1) $$A_\mu(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\boldsymbol{k}}}\left\{a_{\boldsymbol{k},s}\epsilon_\mu(k,s)e^{-ikx} + a^\dagger_{\boldsymbol{k},s}\epsilon^*_\mu(k,s)e^{ikx}\right\}$$

scalar $\otimes\, \epsilon_\mu$

お茶の水女子大学
Ochanomizu University

例：β崩壊@フェルミ理論

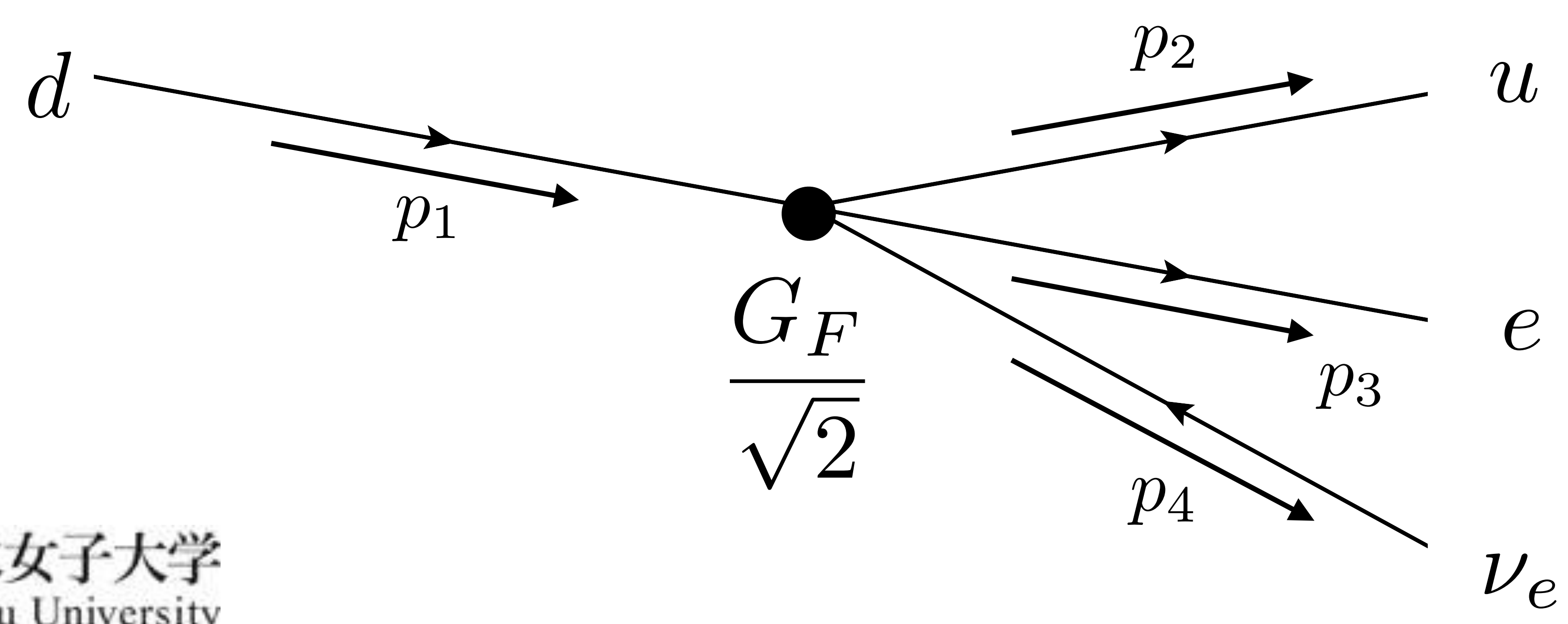
フェルミ理論：contact interaction

$$\mathcal{L}_{\rm int} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \overline{\psi}_u \Gamma^\mu \psi_d \overline{\psi}_e \Gamma_\mu \psi_\nu \qquad (\Gamma^\mu = \gamma^\mu(1-\gamma_5))$$

ψ:粒子消滅 or 反粒子生成

$\overline{\psi}$:粒子生成 or 反粒子消滅

ファインマン・ダイアグラム



お茶の水女子大学
Ochanomizu University

ゲージ対称性

お茶の水女子大学
Ochanomizu University

Maxwell-eq.

(ほとんどスキップ)

$$\nabla \boldsymbol{E} = \rho \qquad \nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \boldsymbol{B} = 0 \qquad \nabla \times \boldsymbol{B} - \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \boldsymbol{j}$$

電磁場（E, B) ↔電磁ポテンシャル（A, Φ）

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \nabla \phi \qquad \boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$$

この関係は「ゲージ変換」に対して不変（α：任意関数）

$$\phi \to \phi' = \phi - \frac{\partial \alpha}{\partial t} \qquad \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \nabla \alpha$$

まとめて書くと

$$A_\mu \to A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \alpha \qquad A_\mu = (\phi, -\boldsymbol{A}),\ \partial_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right)$$

お茶の水女子大学
Ochanomizu University

Global symmetry [free-Dirac field]

自由Dirac場を例にとる（スカラー場でも完全に同じ議論可能）

Lagrangian

$$\mathcal{L} = i\overline{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\overline{\psi}\psi$$

場の位相変換に対して不変 (α: const.)

$$\psi \to \psi' = e^{i\alpha}\psi, \quad \overline{\psi} \to \overline{\psi}' = e^{-i\alpha}\overline{\psi}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L} \to \mathcal{L}' &= i\overline{\psi}'\gamma^\mu \partial_\mu \psi' - m\overline{\psi}'\psi' \\ &= i\left(e^{-i\alpha}\overline{\psi}\right)\gamma^\mu \partial_\mu \left(e^{i\alpha}\psi\right) - m\left(e^{-i\alpha}\overline{\psi}\right)\left(e^{i\alpha}\psi\right) \\ &= \mathcal{L}\end{aligned}$$

微分項の変換　$(\partial_\mu \psi) \to (\partial_\mu \psi)' = e^{i\alpha}\partial_\mu \psi$

お茶の水女子大学 Ochanomizu University

Local symmetry [free-Dirac field]

位相が局所的でも不変であることを要求してみよう

$$\alpha = \alpha(x)$$

Lagrangianは明らかに不変ではない。なぜなら

$$\partial_\mu \psi' = \partial_\mu \left(e^{i\alpha} \psi \right) = i(\partial_\mu \alpha) e^{i\alpha} \psi + e^{i\alpha} \partial_\mu \psi \neq e^{i\alpha} \partial_\mu \psi$$

不変になるにはどうすればよいか、という問題に置き換える

お茶の水女子大学 Ochanomizu University

Local symmetry [free-Dirac field]

不変性を壊す原因→微分が入った項

$$(\partial_\mu \psi)' \neq e^{i\alpha} \partial_\mu \psi$$

この項が次のように変換してくれたら不変性OK

$$(D_\mu \psi)' = e^{i\alpha(x)} (D_\mu \psi)$$

このような変換を満たす"微分の拡張"は？（共変微分）

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + iA_\mu$$

お茶の水女子大学
Ochanomizu University

Local symmetry [free-Dirac field]

"微分"項の変換

$$(D_\mu \psi)' = \left(\partial_\mu + iA'_\mu\right)\psi' = e^{i\alpha}\left(\partial_\mu + iA_\mu\right)\psi$$

$$\downarrow$$

$$A_\mu \to A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \alpha$$

導入した新しい場の変換性は電磁ポテンシャル（電磁場）のゲージ変換に等しい→電磁場と見なしてみよう

電磁相互作用は素電荷eを通して行われるので電荷Qのフェルミオンに対して

$$D_\mu \psi = \left(\partial_\mu + ieQA_\mu\right)\psi$$

$$\psi \to \psi' = e^{iQ\alpha}\psi, \quad A_\mu \to A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu \alpha$$

お茶の水女子大学 Ochanomizu University

何をしていたのか

自由Dirac場→自由電子：no interaction

局所位相変換不変性を要求

　→微分項の修正

　→新しい場の導入

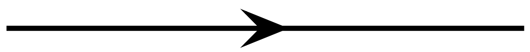
　→電磁場と同じ変換性

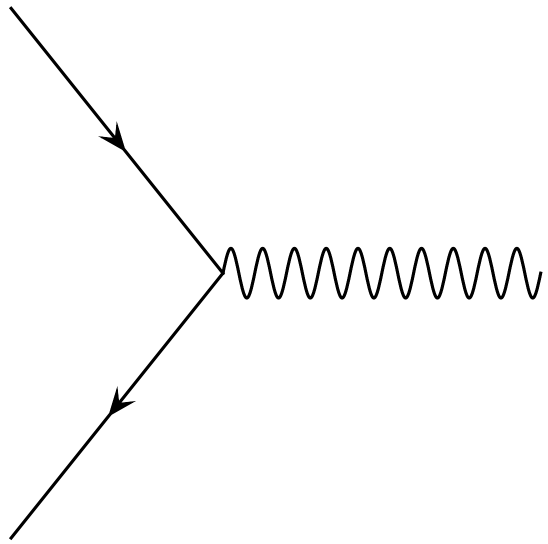
電子と電磁場の相互作用が導入された。局所位相変換を電子（ディラック場）のゲージ変換と呼ぶことにする。

Lagrangian [QED]

電荷Qのフェルミオンと電磁場からなる系

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= i\overline{\psi}\gamma^\mu D_\mu \psi - m\overline{\psi}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\
&= i\overline{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\overline{\psi}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - eQ\overline{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu
\end{aligned}
$$





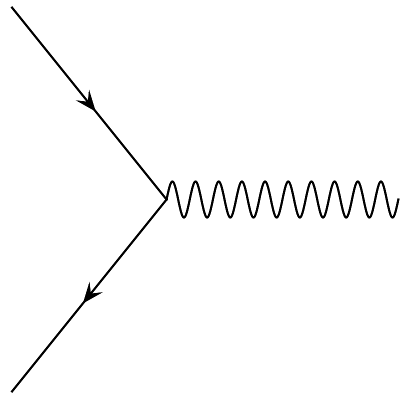
Lagrangian [QED]

電荷Qのフェルミオンと電磁場からなる系

$$\mathcal{L} = i\overline{\psi}\gamma^\mu D_\mu \psi - m\overline{\psi}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

$$= i\overline{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\overline{\psi}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - eQ\overline{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$$

→QED（量子電磁力学）のラグランジアン

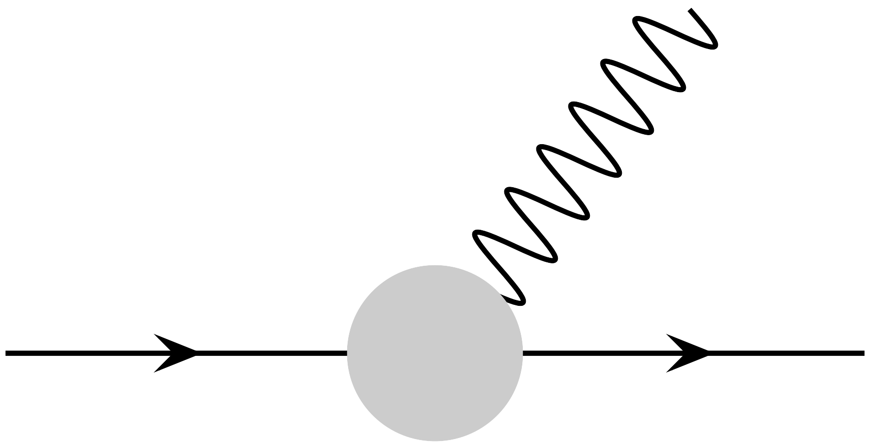


1. 荷電フェルミオンと電磁場の相互作用は1パターン
2. 電磁場の質量項はない（禁止）
3. 局所位相変換不変性の要求、導入された場を電磁場とみなすこと、これらはまだ正しいかどうかわからない。実験による検証が必要

お茶の水女子大学
Ochanomizu University

success of QED

anomalous magnetic moment of an electron



$$\bar{u}(p_2)\left[\gamma^\mu F_1(q^2) + \frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m}F_2(q^2)\right]u(p_1)$$

$$g = 2 + 2F_2(0)$$

$$a_e \equiv \frac{g-2}{2}$$

$$a_e(\mathrm{HV08}) = 1\ 159\ 652\ 180.73\ (0.28) \times 10^{-12}$$ Hanneke, etal (2011)

$$a_e(\mathrm{theory}) = 1\ 159\ 652\ 181.643\ (25)(23)(16)(763) \times 10^{-12}$$

$$a_e(\mathrm{HV08}) - a_e(\mathrm{theory}) = -0.91\ (0.82) \times 10^{-12}$$ Aoyama, etal [arXiv:1412.8284]

SU(N) ゲージ対称性

$$\psi \to \psi' = U\psi$$

QED： $U = e^{iQ\alpha}$

SU(N)： $U = e^{iT^a\theta^a}$

$U : (N \times N)$ unitary matrix

$U^\dagger U = UU^\dagger = I, \; U^\dagger = U^{-1}$

det U=+1→SU(N)

QEDは「生成子をQとするU(1)ゲージ理論」

T^a : generator (hermite matrix)

$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c$

SU(N)での生成子の数→N^2−1

SU(2): 4-1=3→パウリ行列

SU(3): 9-1=8→ゲルマン行列

お茶の水女子大学
Ochanomizu University

SU(N) ゲージ対称性

$$\psi \to \psi' = U\psi$$

QED：$U = e^{iQ\alpha}$　　　SU(N)：$U = e^{iT^a\theta^a}$

最も大きな違い

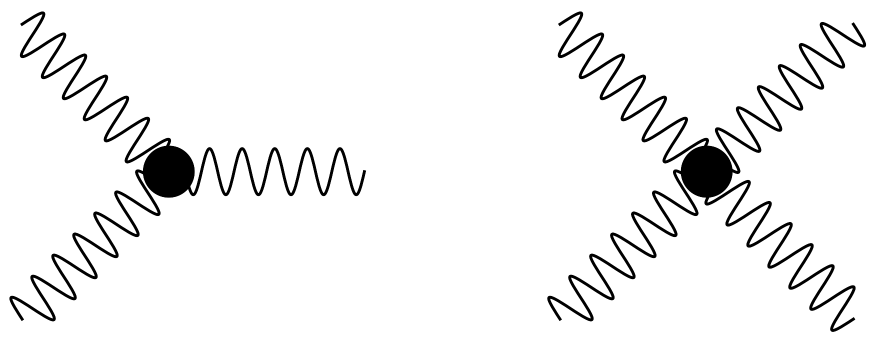
$$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c$$

$$D_\mu\psi = (\partial_\mu + ieQA_\mu)\,\psi$$

$$D_\mu\psi = \left(\partial_\mu + igT^aA^a_\mu\right)\psi$$

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu - gf^{abc}A^b_\mu A^c_\nu$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} \to \text{(gauge)}^3,\ \text{(gauge)}^4$$



電磁気力、強い力…弱い力？

電磁相互作用：QEDでOK

強い相互作用（クォーク）：QCDでOK

　QCD…SU(3)ゲージ理論

弱い力（フェルミ理論）：ゲージ理論と相容れない

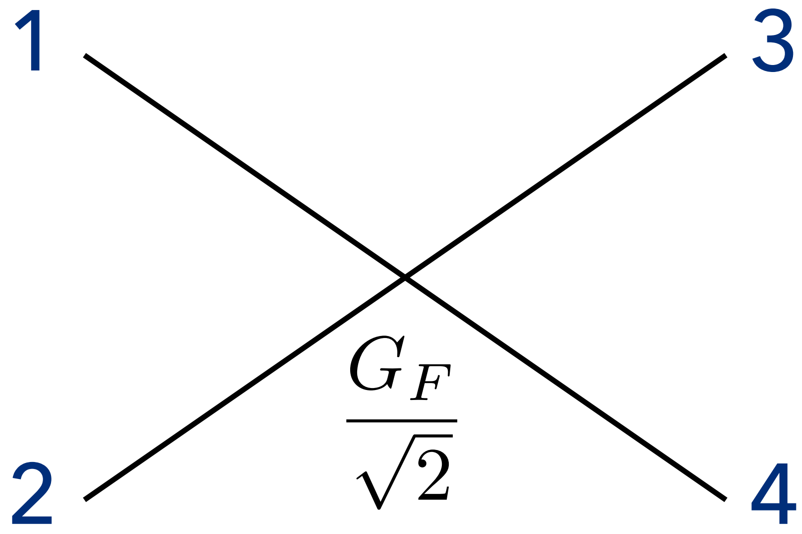
Lagrangianと結合定数の「次元」

Fermi理論の限界

$$\mathcal{L}_{\rm int} = \frac{G_F}{\sqrt{2}}\overline{\psi}_3\Gamma^\mu\psi_1\overline{\psi}_4\Gamma_\mu\psi_2$$

1+2 → 3+4@高エネ極限 (massless limit)

G_Fの次元⇒[1/M^2]



断面積（次元解析）=[L^2]=[1/M^2]

$$\sigma \simeq G_F^2 s \qquad s = (p_1 + p_2)^2$$

s→大で発散（理論の適用限界アリ）

素粒子標準模型

SU(2)xU(1)電弱統一模型

お茶の水女子大学
Ochanomizu University

Set up

ゲージ対称性：SU(2) x U(1)

SU(2)の生成子：（弱）アイソスピン I

U(1)の生成子：（弱）ハイパーチャージ Y

左巻きフェルミオンだけがアイソスピンを持つとする（二重項）

左巻き、右巻きフェルミオンが異なる量子数
→質量項がゲージ対称性から禁止される
→皆がmassless

お茶の水女子大学
Ochanomizu University

フェルミオン質量とゲージ対称性

（例）電子

QEDでの質量項

$$e'_R = e^{iQ_R\theta} e_R, \qquad e'_L = e^{iQ_L\theta} e_L$$

$$\mathcal{L}_{\mathrm{m}} = m\bar{e}'_R e'_L = m e^{-i(Q_R - Q_L)\theta} \bar{e}_R e_L = m\bar{e}_R e_L$$

U(1) hypercharge

$$\mathcal{L}_{\mathrm{m}} = m\bar{e}'_R e'_L = m e^{-i(Y_R - Y_L)\theta} \bar{e}_R e_L \neq m\bar{e}_R e_L$$

お茶の水女子大学
Ochanomizu University

charge assignment

場	カラー	弱アイソスピン I	I_3	Y	電荷 Q
$Q = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$	$\mathbf{3}$	$\mathbf{2}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\frac{1}{6}$	$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$
u_R	$\mathbf{3}$	$\mathbf{1}$	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
d_R	$\mathbf{3}$	$\mathbf{1}$	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
$L = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e_L \end{pmatrix}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{2}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$-\frac{1}{2}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
e_R	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	0	-1	-1
$\varphi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{2}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\frac{1}{2}$	$\begin{pmatrix} +1 \\ 0 \end{pmatrix}$

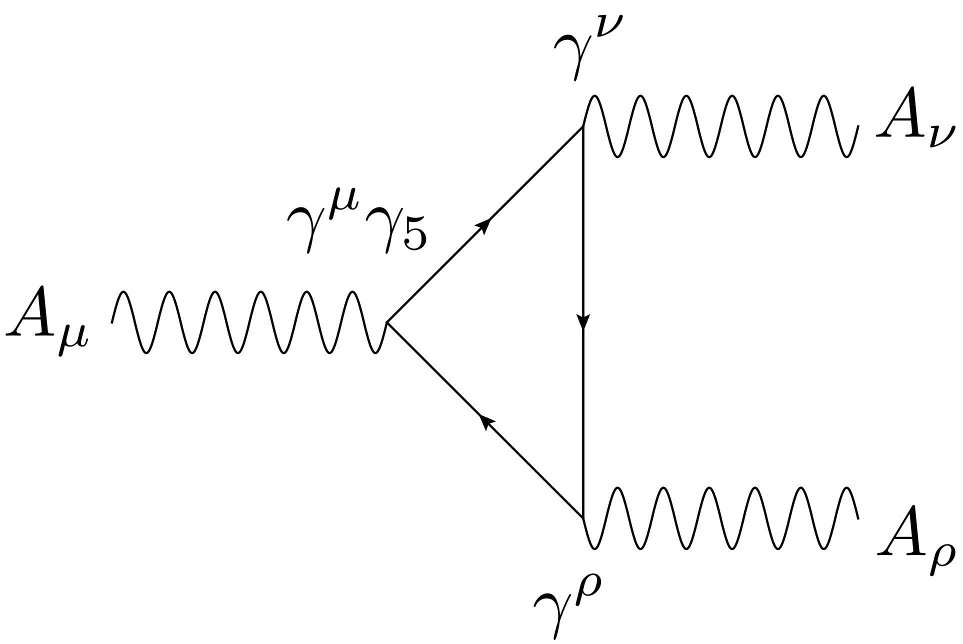
Q=I_3 + Y：ゲルマン西島の公式

何故こう割り当てたのか？

charge assignmentの正当化

anomaly →tree levelで成り立つ対称性がloop levelで破れること（一般にありうる）

gauge anomaly →（異なる）ゲージ場間の相互作用@1ループ

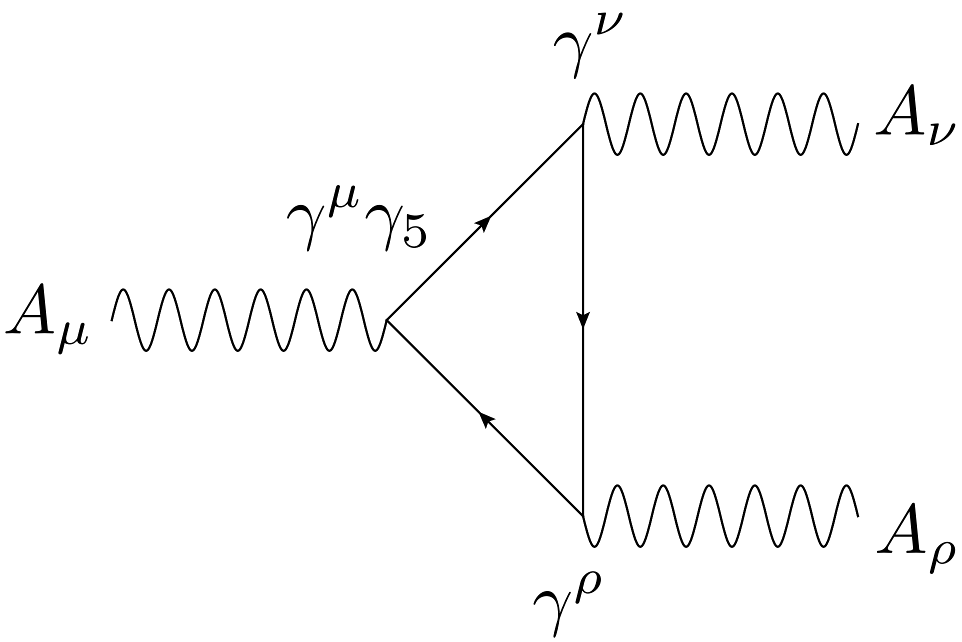


fermionのL,Rが区別される理論（カイラルな理論）で発生するダイアグラム

SU(3), SU(2), U(1)の間で「混じる」→元のラグランジアンにこういう（ゲージ不変な）相互作用はない

お茶の水女子大学 Ochanomizu University

charge assignmentの正当化



このようなダイアグラムが発生しても、内線（ループ）を構成する複数の寄与の間で打ち消し合っていればよい

$\mathrm{U}(1)\,[\mathrm{SU}(3)]^2,\ \mathrm{U}(1)\,[\mathrm{SU}(2)]^2,\ [\mathrm{U}(1)]^3,\ \mathrm{etc}$

$$\sum_{\text{color}} Y = 0$$

$$\sum_{\text{left}} Y = 0$$

$$\sum_{\text{all}} Y^3 = 0$$

SMでは粒子毎のハイパーチャージの割り当てによってアノマリーが消えることが保証されている

お茶の水女子大学 Ochanomizu University

標準模型のラグランジアン

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\mathrm{kin}} + \mathcal{L}_{\mathrm{Yukawa}} - V_{\mathrm{Higgs}}$$

標準模型のラグランジアン

kinetic terms（場の2次、微分アリ）

$$\mathcal{L}_{\rm kin} = -\frac{1}{4}\sum_{a=1}^{8} G^a_{\mu\nu}G^{a\,\mu\nu} - \frac{1}{4}\sum_{a=1}^{3} W^a_{\mu\nu}W^{a\,\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} + i\overline{\psi}_L\gamma^\mu D_\mu\psi_L + i\overline{\psi}_R\gamma^\mu D_\mu\psi_R + |D_\mu\phi|^2$$

共変微分：SU(3), SU(2), U(1)からなる

$$D_\mu = \partial_\mu + ig_s\frac{\lambda^a}{2}G^a_\mu + ig\frac{\sigma^a}{2}W^a_\mu + ig_Y Y B_\mu$$

具体的に...

$$
\begin{aligned}
D_\mu Q &= \left(\partial_\mu + i g_s \frac{\lambda^a}{2} G^a_\mu + i g \frac{\sigma^a}{2} W^a_\mu + i g_Y Y_Q B_\mu\right) Q, \\
D_\mu u_R &= \left(\partial_\mu + i g_s \frac{\lambda^a}{2} G^a_\mu \qquad\qquad\qquad\quad + i g_Y Y_{u_R} B_\mu\right) u_R, \\
D_\mu d_R &= \left(\partial_\mu + i g_s \frac{\lambda^a}{2} G^a_\mu \qquad\qquad\qquad\quad + i g_Y Y_{d_R} B_\mu\right) d_R, \\
D_\mu L &= \left(\partial_\mu \qquad\qquad\qquad + i g \frac{\sigma^a}{2} W^a_\mu + i g_Y Y_L B_\mu\right) L, \\
D_\mu e_R &= \left(\partial_\mu \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad + i g_Y Y_{e_R} B_\mu\right) e_R, \\
D_\mu \varphi &= \left(\partial_\mu \qquad\qquad\qquad + i g \frac{\sigma^a}{2} W^a_\mu + i g_Y Y_\varphi B_\mu\right) \varphi,
\end{aligned}
$$

elemagの基底で書き直す

$$D_\mu = \partial_\mu + ig_s \frac{\lambda^a}{2} G_\mu^a + ig\frac{\sigma^a}{2} W_\mu^a + ig_Y Y B_\mu$$

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\sigma^a}{2} W_\mu^a = \frac{1}{\sqrt{2}} (T^+ W_\mu^+ + T^- W_\mu^-) + \frac{\sigma^3}{2} W_\mu^3$$

$$W^\mp \equiv \frac{W^1 \pm iW^2}{\sqrt{2}}$$

荷電Wボソン

$$T^\pm \equiv \frac{\sigma^1 \pm i\sigma^2}{2},\quad T^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad T^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

二重項(u,d)_Lの入れ替え→電荷を±1変化

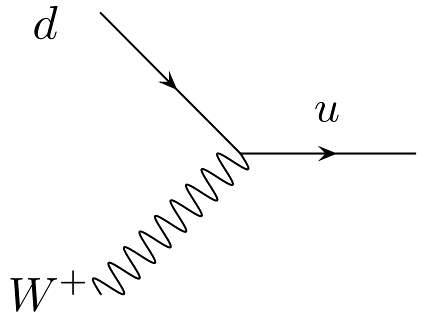
$$\mathcal{L} = i\overline{Q}\gamma^\mu D_\mu Q \sim \overline{Q}\gamma^\mu ig\frac{\sigma^a}{2} W_\mu^a Q$$ で確かめる（次頁）

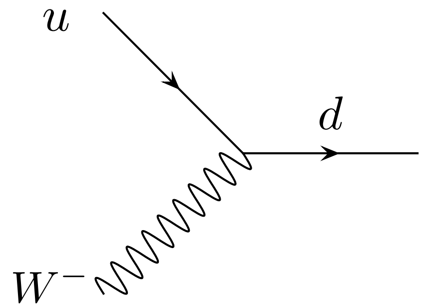
elemagの基底で書き直す

$$T^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &\sim \overline{Q}\gamma^\mu ig\frac{\sigma^a}{2}W_\mu^a Q \\
&= \frac{ig}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \overline{u}_L & \overline{d}_L \end{pmatrix}\gamma^\mu (T^+W_\mu^+ + T^-W_\mu^-)\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \\
&\quad + \frac{ig}{2}\begin{pmatrix} \overline{u}_L & \overline{d}_L \end{pmatrix}\gamma^\mu \sigma^3 W_\mu^3 \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$= \frac{ig}{\sqrt{2}}\left(\overline{u}_L\gamma^\mu d_L W_\mu^+ + \overline{d}_L\gamma^\mu u_L W_\mu^-\right) + \frac{ig}{2}\underline{\left(\overline{u}_L\gamma^\mu u_L + \overline{d}_L\gamma^\mu d_L\right)} W_\mu^3$$





neutral

↓

もう一つある

hypercharge B_μ

中性カレント

$$D_\mu = \partial_\mu + ig_s \frac{\lambda^a}{2} G^a_\mu + \underline{ig \frac{\sigma^a}{2} W^a_\mu} + \underline{ig_Y Y B_\mu}$$

$$\frac{\sigma^a}{2} W^a_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} (T^+ W^+_\mu + T^- W^-_\mu) + \underline{\frac{\sigma^3}{2} W^3_\mu}$$

$$\begin{pmatrix} B \\ W^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_W & -\sin\theta_W \\ \sin\theta_W & \cos\theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ Z \end{pmatrix}$$

θ_{W} $\left(\sin^2\theta_W\right)$: Weinberg angle

質量固有状態での共変微分

$$
\begin{aligned}
D_\mu \begin{pmatrix} \psi_\uparrow \\ \psi_\downarrow \end{pmatrix} &\sim \left(g_Y Y \cdot \mathbf{1} B_\mu + g \frac{\sigma^3}{2} W_\mu^3 \right) \begin{pmatrix} \psi_\uparrow \\ \psi_\downarrow \end{pmatrix} \\
&= e \begin{pmatrix} Q_\uparrow & 0 \\ 0 & Q_\downarrow \end{pmatrix} A_\mu \begin{pmatrix} \psi_\uparrow \\ \psi_\downarrow \end{pmatrix} \\
&\quad + \frac{g}{\cos\theta_W} \left\{ \begin{pmatrix} I_{3\uparrow} & 0 \\ 0 & I_{3\downarrow} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} Q_\uparrow & 0 \\ 0 & Q_\downarrow \end{pmatrix} \sin^2\theta_W \right\} Z_\mu \begin{pmatrix} \psi_\uparrow \\ \psi_\downarrow \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{
\begin{aligned}
D_\mu &= \partial_\mu + ig \frac{\sigma^a}{2} W_\mu^a + ig_Y Y B_\mu \\
&= \partial_\mu + ig \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \left(T^+ W_\mu^+ + T^- W_\mu^- \right) \right\} + ieQA_\mu + ig_Z (I_3 - Q \sin^2\theta_W) Z_\mu
\end{aligned}
}
$$

お茶の水女子大学 Ochanomizu University

ここまで…ゲージ相互作用

fermion-fermion-vector

湯川相互作用

fermion-fermion-scalar

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\rm kin} + \mathcal{L}_{\rm Yukawa} - V_{\rm Higgs}$$

湯川相互作用

$$\mathcal{L} \sim \overline{\psi_1}\psi_2\phi$$

to be SU(2)xU(1) invariant

SU(2): doublet-doublet-singlet
U(1) : hypercharge sum=0

$$-\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = f_u \overline{Q} u_R \phi^c + f_d \overline{Q} d_R \phi + f_e \overline{L} e_R \phi + \text{h.c.}$$

$$\phi^c \equiv i\sigma_2 \phi^*$$

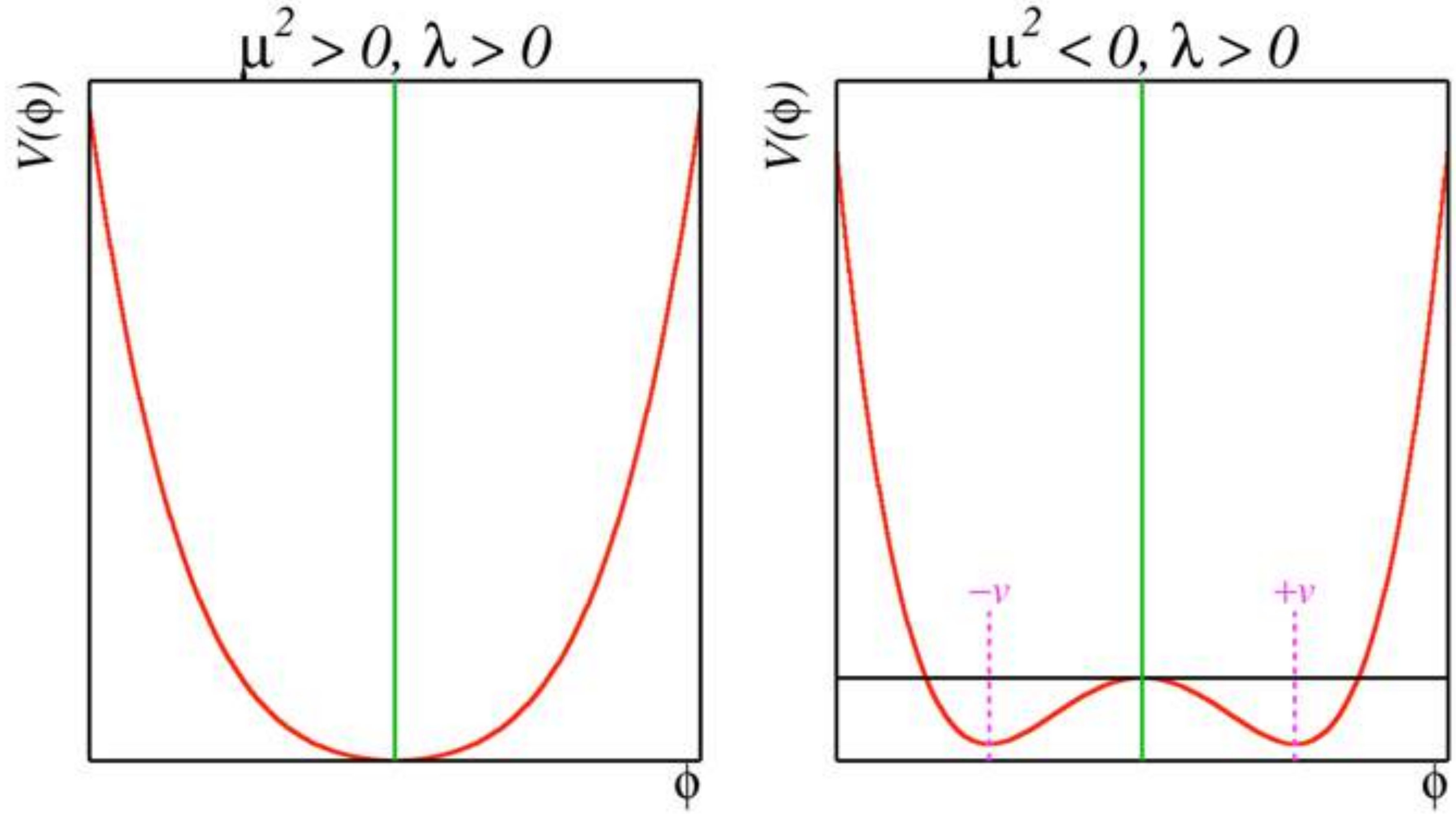
Higgsポテンシャル

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\mathrm{kin}} + \mathcal{L}_{\mathrm{Yukawa}} - V_{\mathrm{Higgs}}$$

お茶の水女子大学
Ochanomizu University

Higgs potential

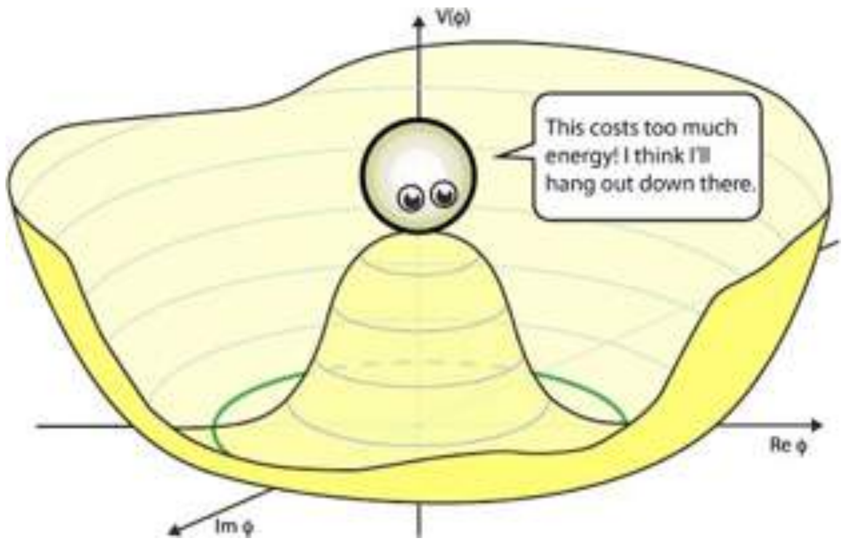
$$V = \mu^2\phi^\dagger\phi + \lambda(\phi^\dagger\phi)^2 \quad (\mu^2 < 0,\ \lambda > 0)$$

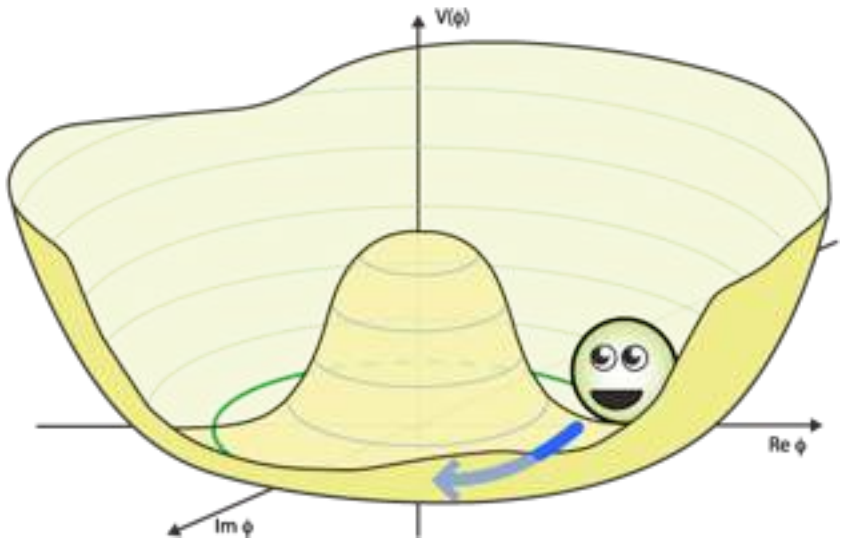


Higgs potential

$$V = \mu^2 \phi^\dagger \phi + \lambda(\phi^\dagger \phi)^2 \quad (\mu^2 < 0,\ \lambda > 0)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \phi_i} = 0 \longleftrightarrow V_{\min} \longrightarrow \phi^\dagger\phi = (\mathrm{Re}\ \phi)^2 + (\mathrm{Im}\ \phi)^2 = -\frac{\mu^2}{2\lambda}$$

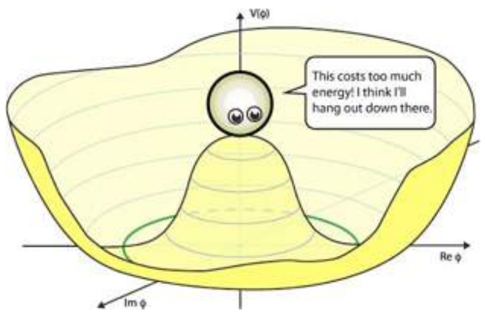


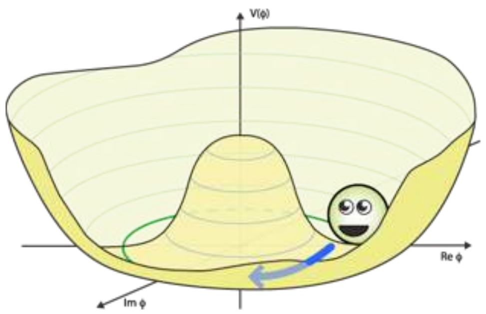


Higgs potential

$$V = \mu^2 \phi^\dagger \phi + \lambda(\phi^\dagger \phi)^2 \quad (\mu^2 < 0,\ \lambda > 0)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \phi_i} = 0 \longleftrightarrow V_{\rm min} \longrightarrow \phi^\dagger \phi = ({\rm Re}\ \phi)^2 + ({\rm Im}\ \phi)^2 = -\frac{\mu^2}{2\lambda}$$





vacuum expectation value

$$\langle \phi^\dagger \phi \rangle \equiv \left(\frac{v}{\sqrt{2}} \right)^2, \ v^2 = -\frac{\mu^2}{\lambda}$$

Higgs potential

SU(2)xU(1) →U(1)[QED]

$$\phi = \begin{pmatrix} \varphi^+ \\ \varphi^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho + i\xi \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(v + h + i\eta) \end{pmatrix}$$

$$\langle \rho \rangle = \cdots = 0$$

$$\rho, \xi, \eta$$

Nambu-Goldstone bosons
（W+, W-, Zに吸収される）

$$\langle \phi \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \qquad v^2 = -\frac{\mu^2}{\lambda}$$

自発的対称性の破れと
ヒッグス機構

example: scalar QED

Lagrangian

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + |D_\mu\phi|^2 - V(\phi)$$

ゲージ変換

$$\phi \to e^{i\alpha}\phi, \quad A_\mu \to A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha$$

Higgs potential

$$V = \mu^2\phi^*\phi + \lambda(\phi^*\phi)^2$$

example: scalar QED

Higgs potential

$$V = \mu^2 \phi^* \phi + \lambda (\phi^* \phi)^2$$

scalar field (v.e.v.+2 real fields)

$$\phi = \frac{v}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2)$$

$$V = \underbrace{-\mu^2 \phi_1^2}_{\text{massive}} + \underbrace{0 \cdot \phi_2^2}_{\text{massless (NG boson)}} + \cdots$$

お茶の水女子大学
Ochanomizu University

example: scalar QED

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + |D_\mu\phi|^2 - V(\phi) \longleftarrow \phi = \frac{v}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2)$$

$$|D_\mu\phi|^2 = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_2)^2 + \frac{(ev)^2}{2}A_\mu A^\mu + evA_\mu\partial^\mu\phi_2 + \cdots$$

ゲージ場の質量

$m_A = ev$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_2)^2 + \frac{(ev)^2}{2}A_\mu A^\mu$$
$$+ evA_\mu\partial^\mu\phi_2 + \mu^2\phi_1^2 + \cdots$$

何者？

（ゲージ場とNGボソンの混合）

“Higgs”質量 $m_{\phi_1} = \sqrt{-2\mu^2}$

お茶の水女子大学 Ochanomizu University

example: scalar QED

真空偏極…Lagrangianの中で光子の（微分を含まない）2次の項

$$\mathcal{L} \sim A_\mu \Pi^{\mu\nu} A_\nu$$ ゲージ不変か

ゲージ変換

$$A_\mu \to A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu \chi \xrightarrow{\text{ファインマン・ルール的には}} \epsilon_\mu \to \epsilon_\mu + \frac{1}{e} i k_\mu$$

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\boldsymbol{k}}} \left\{ a_{\boldsymbol{k},s}\epsilon_\mu(k,s)e^{-ikx} + a^\dagger_{\boldsymbol{k},s}\epsilon^*_\mu(k,s)e^{ikx} \right\}$$

$$\phi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\boldsymbol{k}}} \left(a_{\boldsymbol{k}} e^{-ikx} + b^\dagger_{\boldsymbol{k}} e^{ikx} \right)$$

$$\downarrow$$

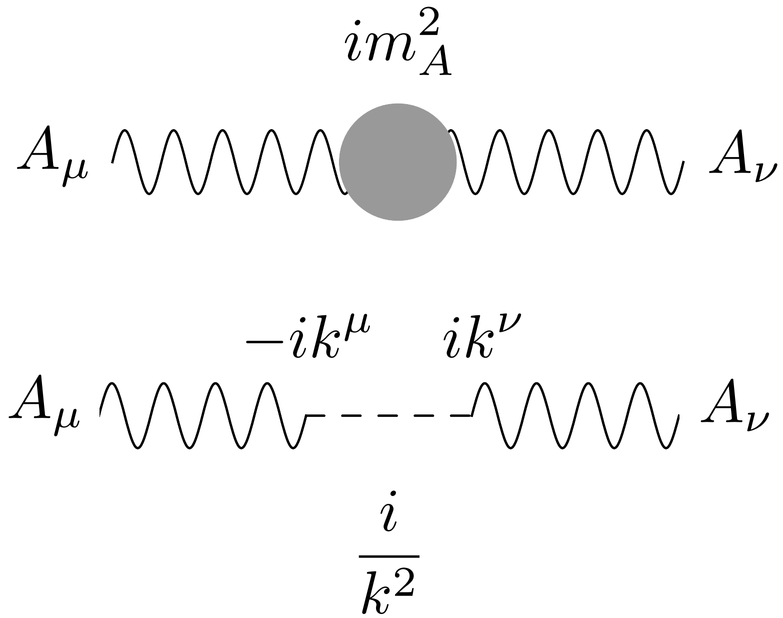
$$k_\mu \Pi^{\mu\nu} = 0$$ ゲージ不変性が保証

お茶の水女子大学
Ochanomizu University

example: scalar QED

$$\mathcal{L} \sim A_\mu \Pi^{\mu\nu} A_\nu$$

$\longrightarrow$



$$\begin{aligned} i\Pi^{\mu\nu} &= i(ev)^2 g^{\mu\nu} + (-evk^\mu)\frac{i}{k^2}(evk^\nu) \\ &= i(ev)^2\left(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}\right) \end{aligned}$$

ゲージ場＋NGボソン

$$k_\mu \Pi^{\mu\nu} = 0$$

お茶の水女子大学
Ochanomizu University

example: scalar QED

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_1)^2 + \frac{1}{2}\mu^2\phi_1^2 + \frac{1}{2}(ev)^2\left(A_\mu + \frac{1}{ev}\partial_\mu\phi_2\right)^2 + \cdots$$

置換え　$B_\mu \equiv A_\mu + \frac{1}{ev}\partial_\mu\phi_2$　　（NGボソン吸収）

ゲージ場（massless vector）→横波2成分

massive vector →横波2＋縦波

massive ゲージ場 →横波2＋縦波（NGボソン）

→ヒッグス機構

（ここまで）

お茶の水女子大学 Ochanomizu University

まとめ

自由粒子のラグランジアン

相互作用→ゲージ対称性

SU(2)xU(1)電弱統一模型

自発的対称性の破れとヒッグス機構

お茶の水女子大学
Ochanomizu University