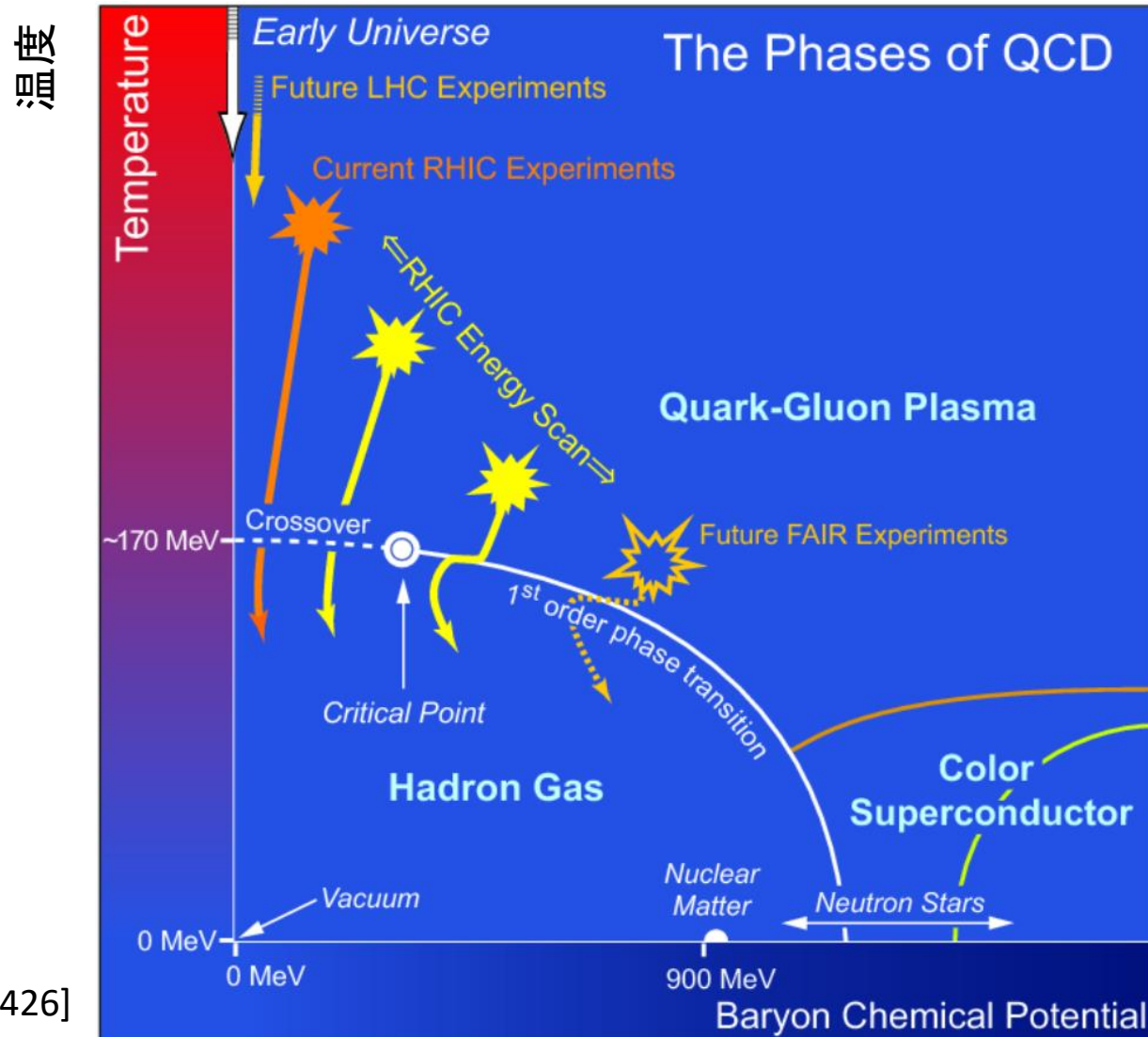


有限密度QCDにおける複素ランジュバン法の適用範囲とカイラル対称性の関係

筒井翔一郎 (理研)

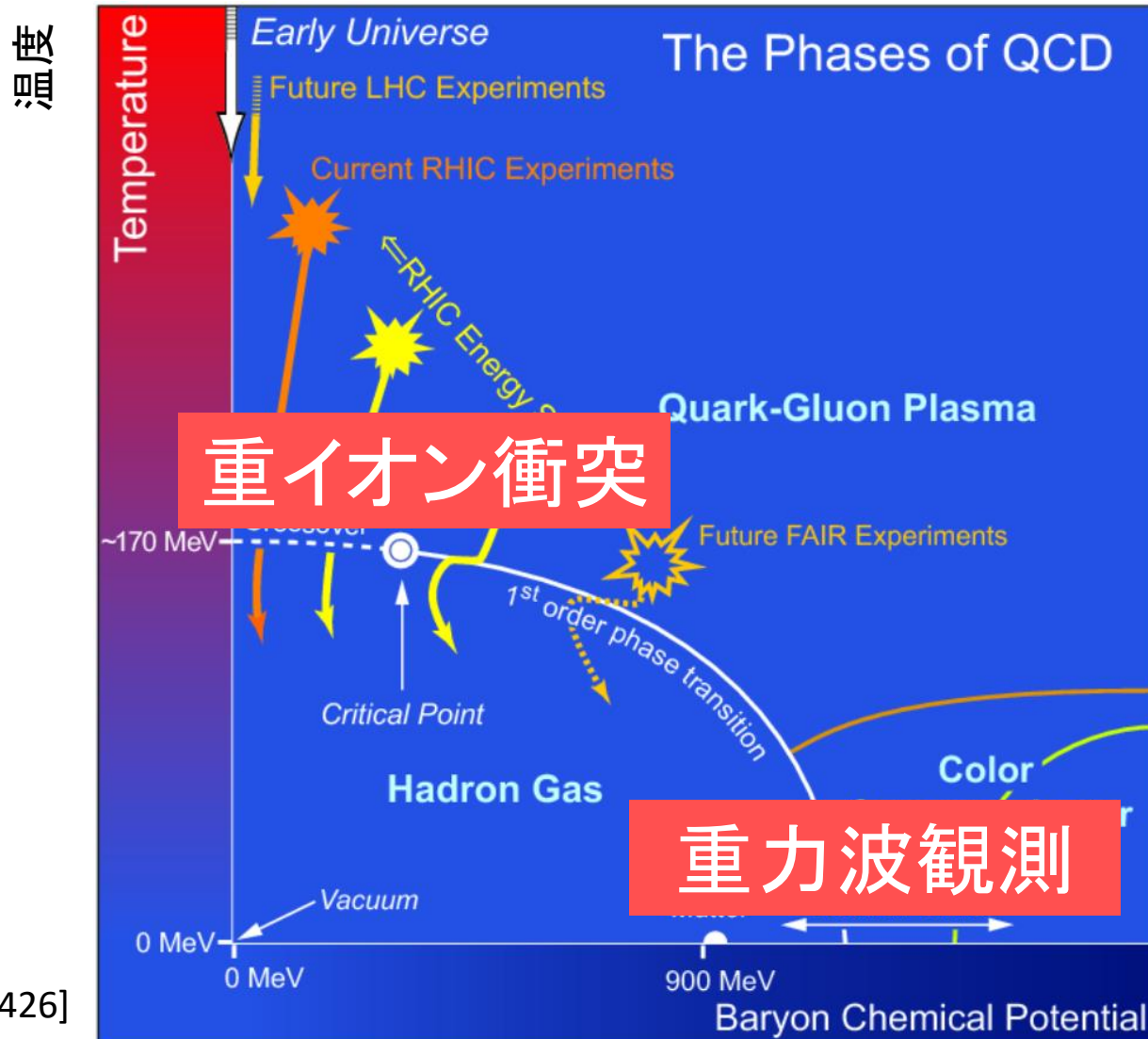
共同研究者: 伊藤祐太 (徳山高専)
松古栄夫 (KEK)
西村淳 (KEK, 総研大)
島崎信二 (慶応大)
土屋麻人 (静岡大)
滑川裕介 (KEK)

QCDの相図



この相図はあくまで予想で、有限密度の詳しい構造は分かっていない

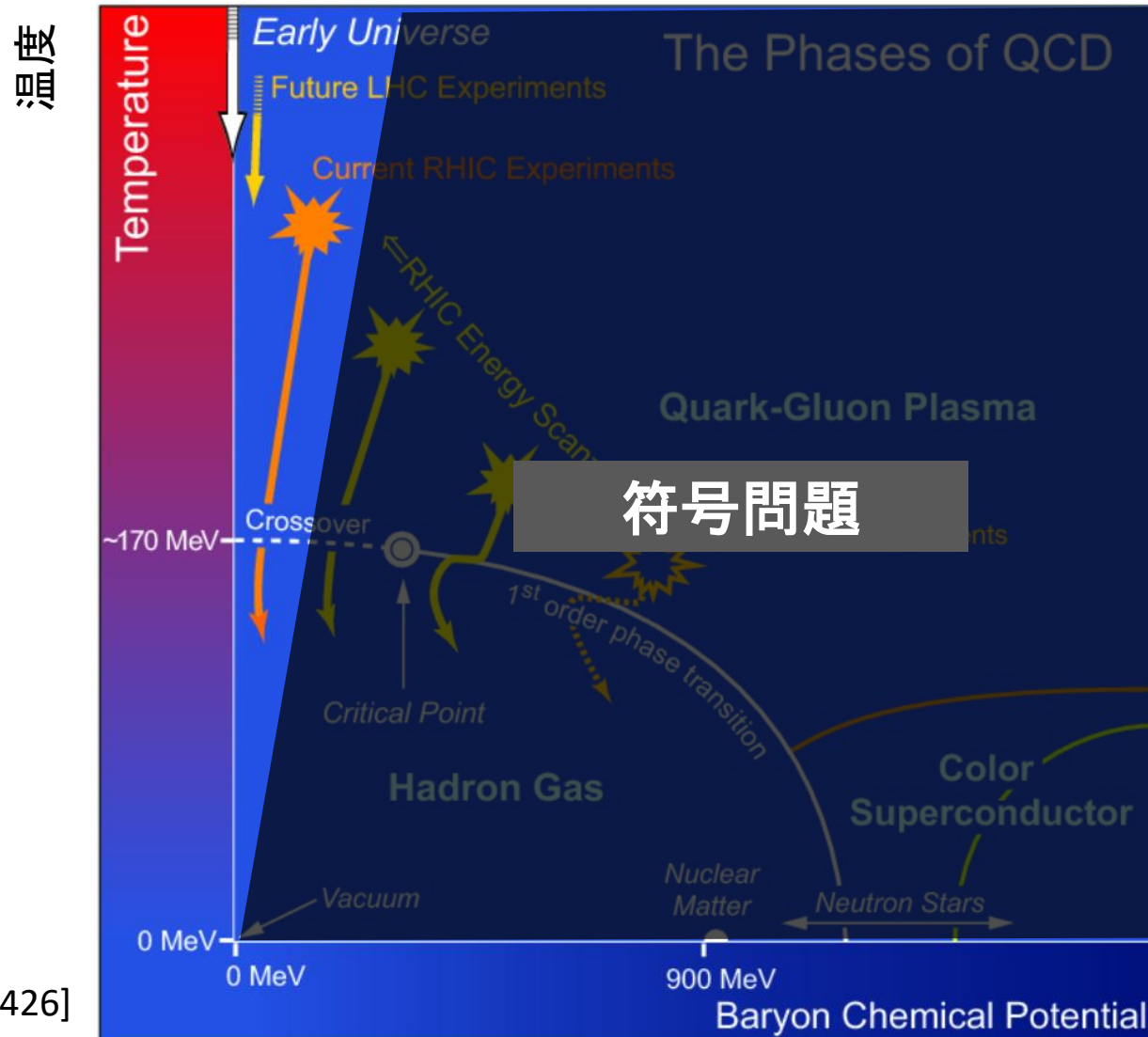
QCDの相図



化学ポテンシャル

有限密度QCDを、実験・観測で調べられる時代になりつつある

QCDの相図



化学ポテンシャル

理論の課題: 符号問題をどう克服するか?

モンテカルロ法

QCDの第一原理計算の仕組み:

$$\langle O \rangle \equiv \frac{1}{Z} \int dx O(x) e^{-S(x)}$$

$$= \int dx O(x) P(x)$$

$$\sim \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N O(x_i)$$

正定値かつ規格化可能
→確率密度関数とみなせる

$P(x)$ に従う確率変数

符号問題

作用が複素数値をとる場合にモンテカルロ法を適用する:

$$\begin{aligned}
 \langle \mathcal{O} \rangle &= \frac{\int dx \mathcal{O}(x) e^{-S_R(x) - iS_I(x)}}{\int dx e^{-S_R(x) - iS_I(x)}} \quad \text{作用の虚部} \\
 &= \frac{\int dx \mathcal{O}(x) e^{-iS_I(x)} e^{-S_R(x)} / \int dx e^{-S_R(x)}}{\int dx e^{-iS_I(x)} e^{-S_R(x)} / \int dx e^{-S_R(x)}} \quad \text{作用の実部} \\
 &= \frac{\langle \mathcal{O} e^{-iS_I} \rangle_{Z_R}}{\langle e^{-iS_I} \rangle_{Z_R}} \quad \begin{array}{l} \text{この因子は激しく振動する関数のため} \\ \text{0/0 から有限値を取り出すような} \\ \text{計算になってしまう} \end{array}
 \end{aligned}$$

QCDラグランジアン(連続理論)

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{a\mu\nu}F_{\mu\nu}^a + \bar{q}(i\gamma^\mu D_\mu - m_q)q$$

グルーオンの運動項 クォークの運動項+
クォークとグルーオンの相互作用項

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c$$

Field strength

$$D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu^a T^a$$

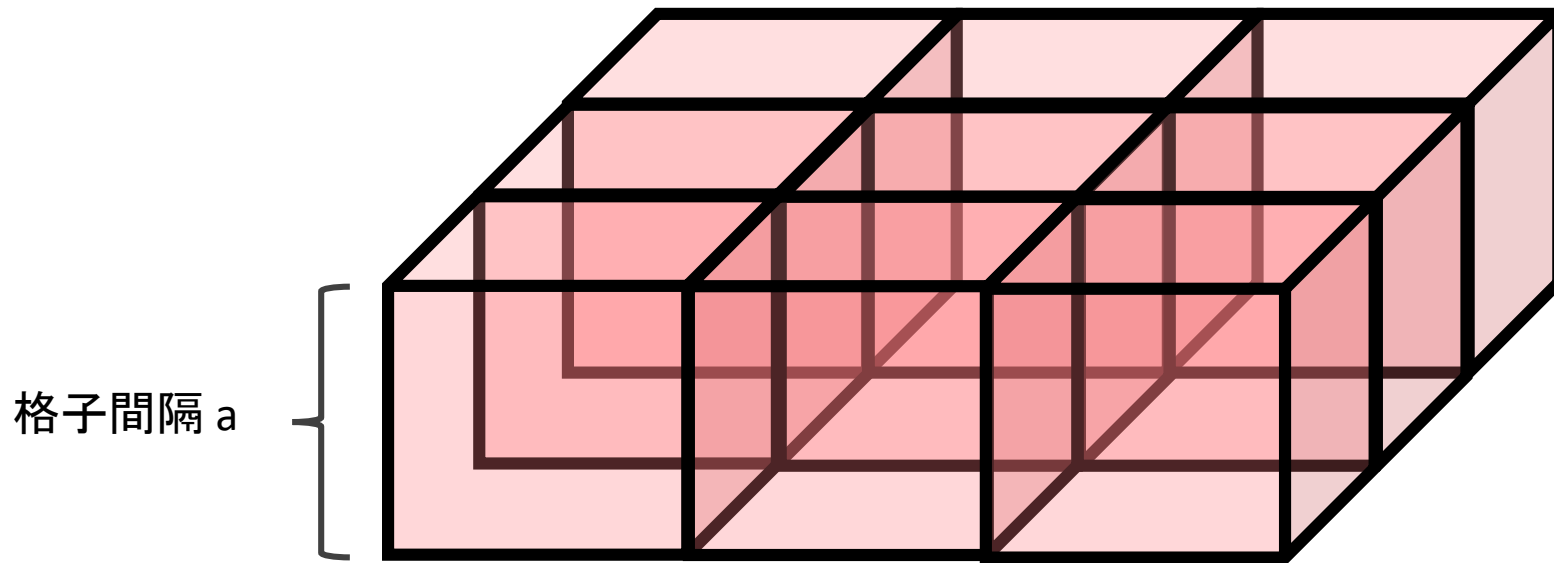
共変微分

$$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c$$

SU(3)の生成子

格子理論の構成

時空を格子状に離散化して、
クォーク、グルーオン場をその上で定義する



格子理論に対する要請:

$a \rightarrow 0$ で、連続理論に一致する
対称性を尊重する

有限密度QCDの符号問題

QCD 分配関数:

リンク変数(グルーオン場を表す変数)

$$Z = \int dU \det M[U, \mu] e^{-S_g[U]}$$

フェルミオン行列式
(クォークの運動, クォークとグルーオンの相互作用)

符号問題の起源:

$\mu \neq 0$ のとき $\det M$ が複素数値をとる

(μ : 化学ポテンシャル)

$$(*) \det(M(\mu)^\dagger) = \det M(-\mu)$$

複素Langevin法(CLM)

分配関数:

$$Z = \int dx e^{-S(x)} \quad x \in \mathbb{R}, \quad S(x) \in \mathbb{C}$$

Parisi (1983) , Klauder (1984)
Klauder, Pertersen (1985)

実軸上で定義されている作用を解析接続する(複素化)

$$x \in \mathbb{R} \rightarrow z \in \mathbb{C}$$

力学変数 z をLangevin方程式に従って、仮想的に時間発展させる

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{\partial S(z)}{\partial z} + \eta \quad \langle \eta(t) \rangle = 0 \quad \eta : (\text{実})\text{Gaussianノイズ}$$
$$\langle \eta(t)\eta(t') \rangle = 2\delta(t-t') \quad \langle \dots \rangle : \text{ノイズ平均}$$

ある条件(後述)下では、“熱平衡状態”における期待値が、経路積分期待値と等価になる

Aarts, Seiler, Stamatescu (2010)
Aarts, James, Seiler, Stamatescu (2011)
Nagata, Nishimura, Shimasaki (2016)

$$\langle O(z(t)) \rangle \rightarrow \frac{1}{Z} \int dx O(x) e^{-S(x)}, \quad t \rightarrow \infty$$

複素Langevin法(CLM) for QCD

分配関数:

$$Z = \int dU \det M[U, \mu] e^{-S_g[U]}$$

実軸上で定義されている作用を解析接続する(複素化)

$$U_{x\mu} \in SU(3) \rightarrow \mathcal{U}_{x\mu} \in SL(3, \mathbb{C})$$

リンク変数をLangevin方程式に従って、仮想的に時間発展させる

$$\mathcal{U}_{x\mu}(t + \epsilon) = \exp \left[i \left(-\epsilon \mathcal{D}_{x\mu} S[\mathcal{U}] + \sqrt{\epsilon} \eta_{x\mu}(t) \right) \right] \mathcal{U}_{x\mu}(t)$$

ある条件(後述)下では、“熱平衡状態”における期待値が、経路積分期待値と等価になる

$$\langle O(z(t)) \rangle \rightarrow \frac{1}{Z} \int dx O(x) e^{-S(x)}, \quad t \rightarrow \infty$$

Full QCD simulations:

Sexty (2014), Fodor, Katz, Sexty, Török (2015)
Nagata, Nishimura, Shimasaki (2018),
ST, Ito, Matsufuru, Nishimura, Shimasaki,
Tsuchiya (2018),
Ito, Matsufuru, Nishimura, Shimasaki,
Tsuchiya, ST (2018),
Sexty (2019), Kogut, Sinclair (2019),
Scherzer(2019)

Aarts, Seiler, Stamatescu (2010)
Aarts, James, Seiler, Stamatescu (2011)
Nagata, Nishimura, Shimasaki (2016)

CLMが正当化されるための条件

$$\mathcal{U}_{x\mu}(t + \epsilon) = \exp \left[i \left(-\epsilon \mathcal{D}_{x\mu} S[\mathcal{U}] + \sqrt{\epsilon} \eta_{x\mu}(t) \right) \right] \mathcal{U}_{x\mu}(t)$$

Nagata, Nishimura, Shimasaki (2016)

ドリフト項 (作用の共変微分)

ドリフト項の確率分布:

$$p(u) = \frac{1}{4N_V} \left\langle \sum_{x\mu} \delta(u - u_{x\mu}) \right\rangle \quad u_{x\mu} = \sqrt{\frac{1}{N_c^2 - 1} \text{tr}(v_{x\nu} v_{x\nu}^\dagger)}$$

ドリフト項の確率分布が指数関数的に減衰

CLMは経路積分と等価

ドリフト項の確率分布がべき則で減衰

経路積分との等価性は保証できない

べき則分布の由来

excursion 問題:

リンク変数がSU(3)から大きく離れてしまう

ドリフト項のゲージ場成分の分布がべき的に減衰

singular drift 問題:

フェルミオン行列式の微分が特異な振る舞いをする

$$v_{x\mu}(\mathcal{U}) \propto \text{tr}(\mathcal{M}[\mathcal{U}]^{-1} \mathcal{D}_{x\mu} \mathcal{M}[\mathcal{U}])$$

ドリフト項のフェルミオン成分の分布がべき的に減衰

CLMの適用範囲 for QCD 1/2

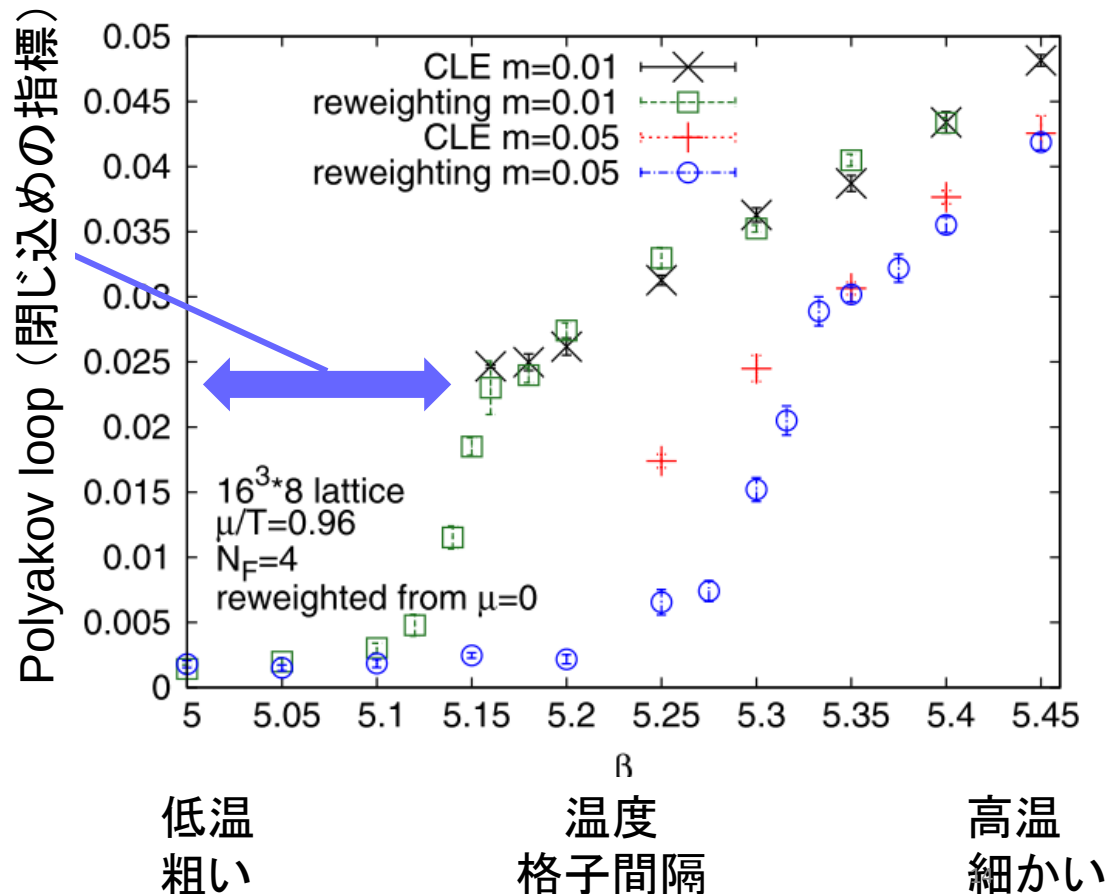
先行研究: reweighting法(通常のモンテカルロ法)とCLMを比較
4フレーバー(スタaggerドフェルミオン), 格子サイズ: $16^3 \times 8$

Fodor, Katz, Sexty, Török (2015)

excursion問題が発生し
計算が収束しない

この論文でのobservation

CLM が使えるためには、
ある程度 **小さな格子間隔**
にする必要がある



CLMの適用範囲 for QCD 1/2

先行研究: reweighting法(通常のモンテカルロ法)とCLMを比較
4フレーバー(スタaggerドフェルミオン), 格子サイズ: $16^3 \times 8$

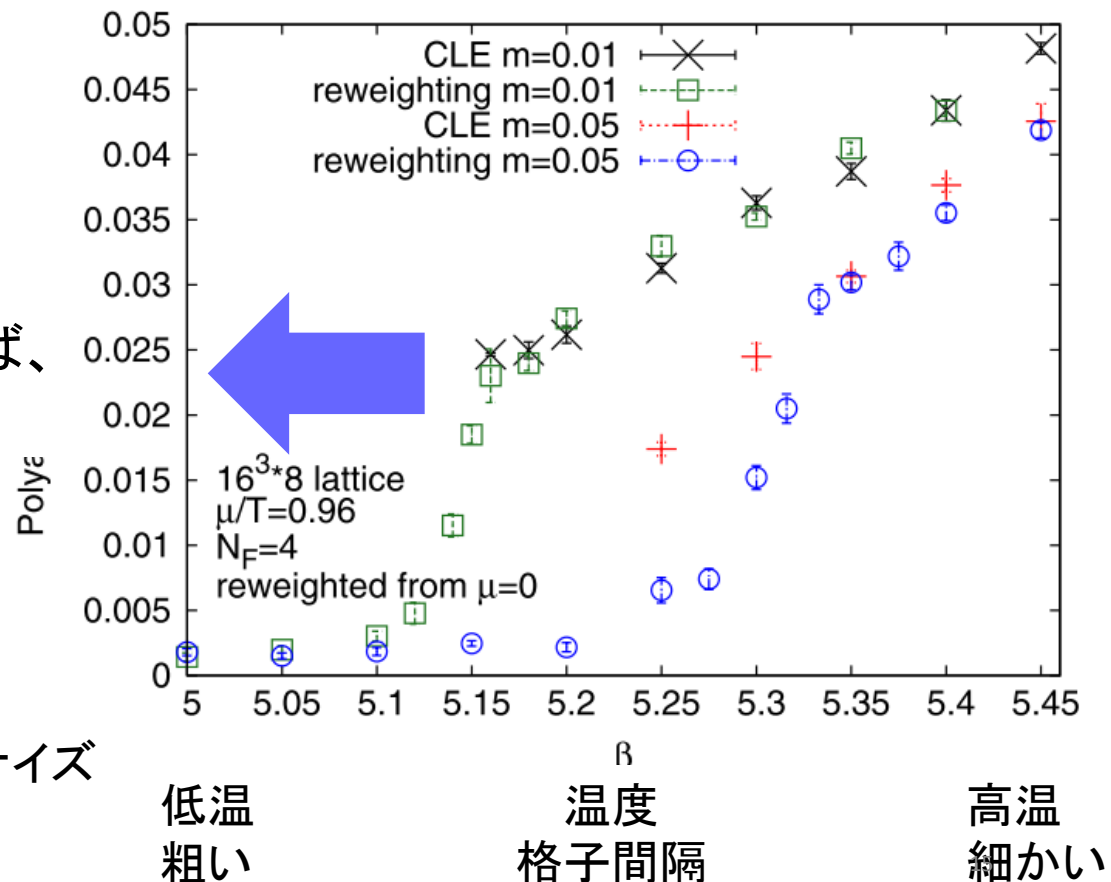
Fodor, Katz, Sexty, Török (2015)

問:

格子間隔 a を大きくすることによって、低温側にアプローチできない。では、 a を固定して時間方向の格子サイズを大きくすれば、低温側も計算できる?

(*) 温度: $T = 1/(N_t a)$

a : 格子間隔, N_t : 時間方向の格子サイズ

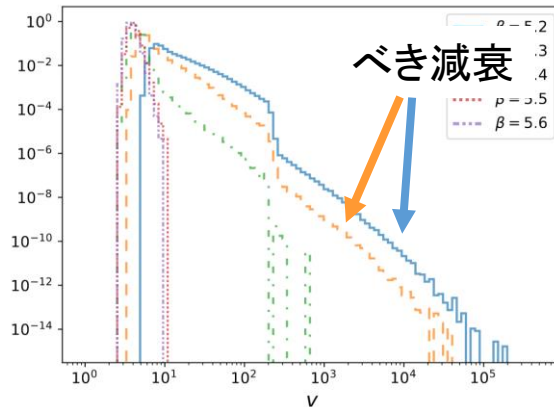
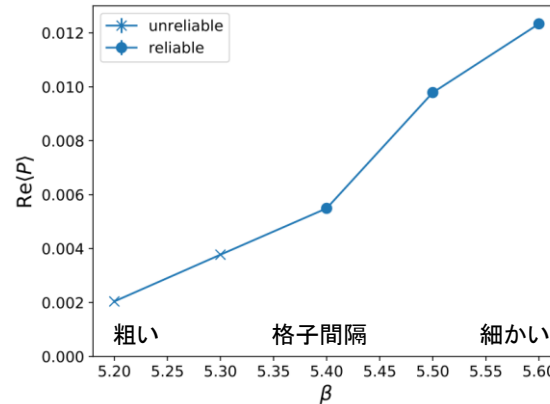


CLMの適用範囲 for QCD 2/2

ST, Ito, Nishimura, Shimasaki, Tsuchiya (2018)

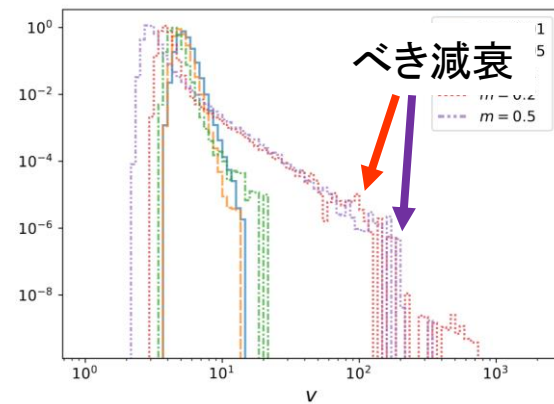
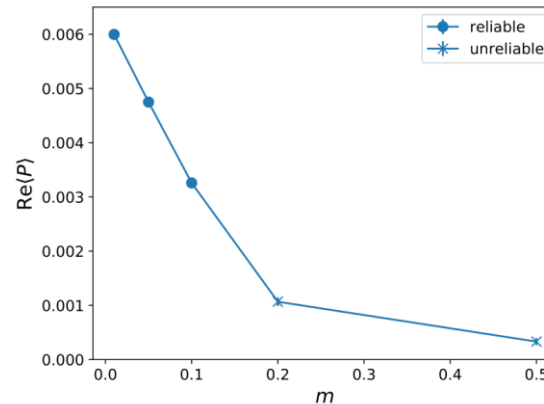
時間方向の格子サイズを $8 \rightarrow 12$ に増やして、同様な計算をすると Fodor, et. al. より **小さな格子間隔** でも **singular drift 問題**が発生

4フレーバー(スタaggerドフェルミオン), $20^3 \times 12$, $ma=0.01$, $\mu/T=1.2$



格子サイズ, μ/T , 格子間隔を固定してクォーク質量を変化させると **質量の大きいところ** で **singular drift 問題**が発生

4フレーバー, $24^3 \times 12$, $\beta=5.4$, $\mu/T=1.2$



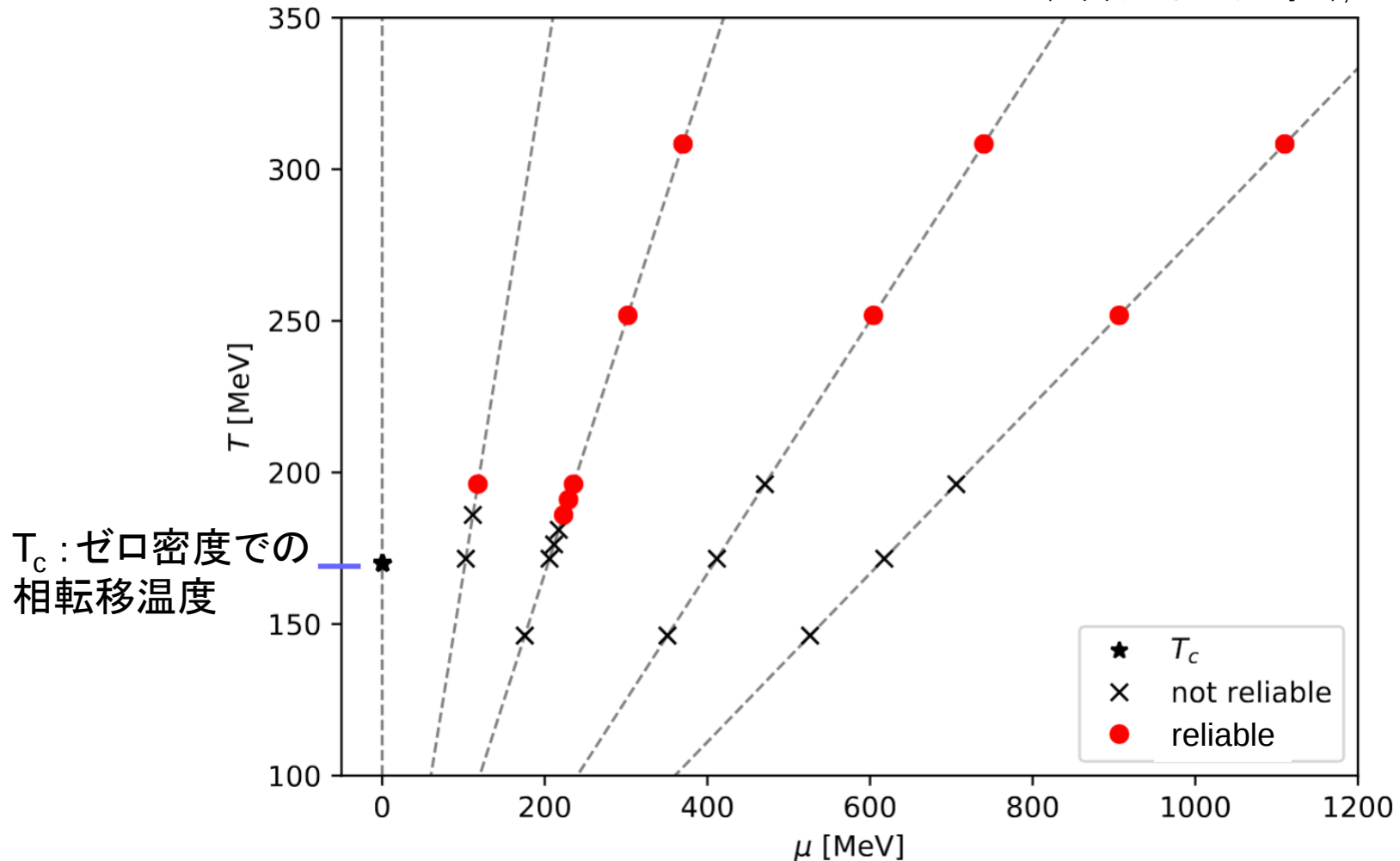
CLMが破綻する要因は、
格子の粗さだけではない

Polyakov loop

ドリフト分布
(フェルミオンセクター)

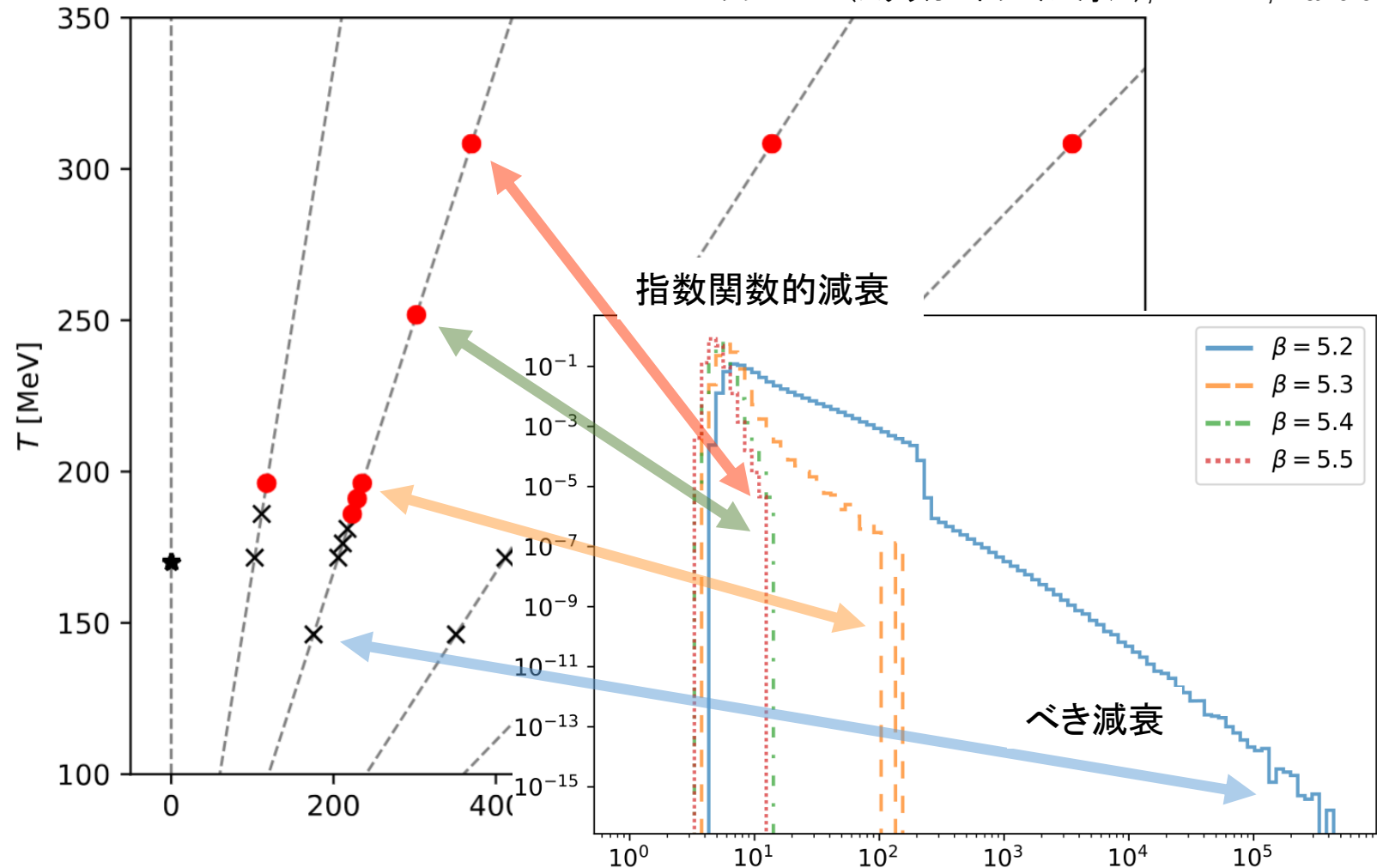
CLMの適用範囲のまとめ

4フレーバー(スタaggerドフェルミオン), $24^3 \times 12$, $ma=0.01$



CLMの適用範囲のまとめ

4フレーバー(スタaggerドフェルミオン), $24^3 \times 12$, $ma=0.01$



CLMが破綻する点では、いずれも **singular drift 問題** が発生していた

Singular drift 問題とカイラル凝縮

Dirac operator にゼロ固有値が存在するならば、
ドリフト項のフェルミオン部分はsingularな振る舞いをする

$$v_{x\mu}(\mathcal{U}) \propto \text{tr} (M[\mathcal{U}]^{-1} \mathcal{D}_{x\mu} M[\mathcal{U}])$$

generalized Banks-Casher relation: [Splittorff '14, Nagata, Nishimura, Shimasaki '16]

Dirac zero mode の密度は、
(有限密度であっても)カイラル凝縮と関係する

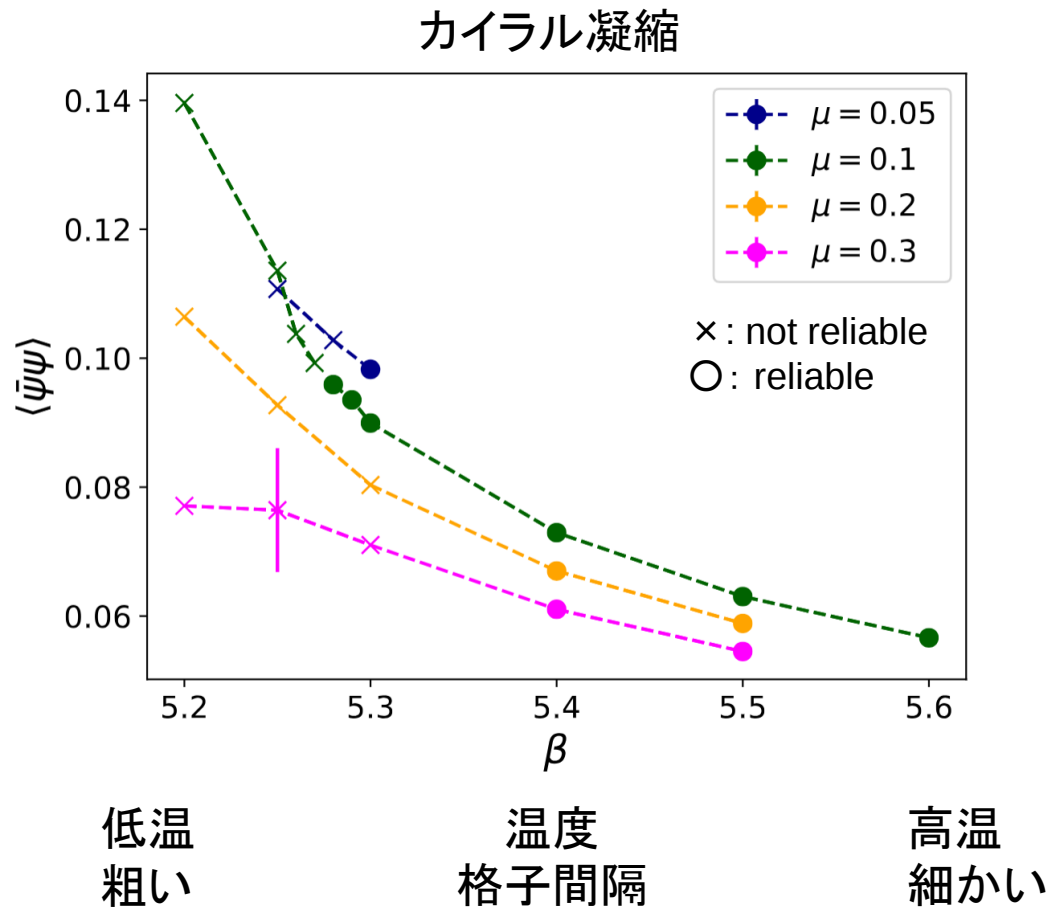
$$\lim_{m \rightarrow +0} \langle \bar{q} q \rangle = \pi \lim_{r \rightarrow +0} r \lim_{m \rightarrow +0} \hat{\rho}^{(\text{CL})}(r)$$

カイラル凝縮

Dirac operator
の固有値密度

CLMの適用範囲とカイラル凝縮

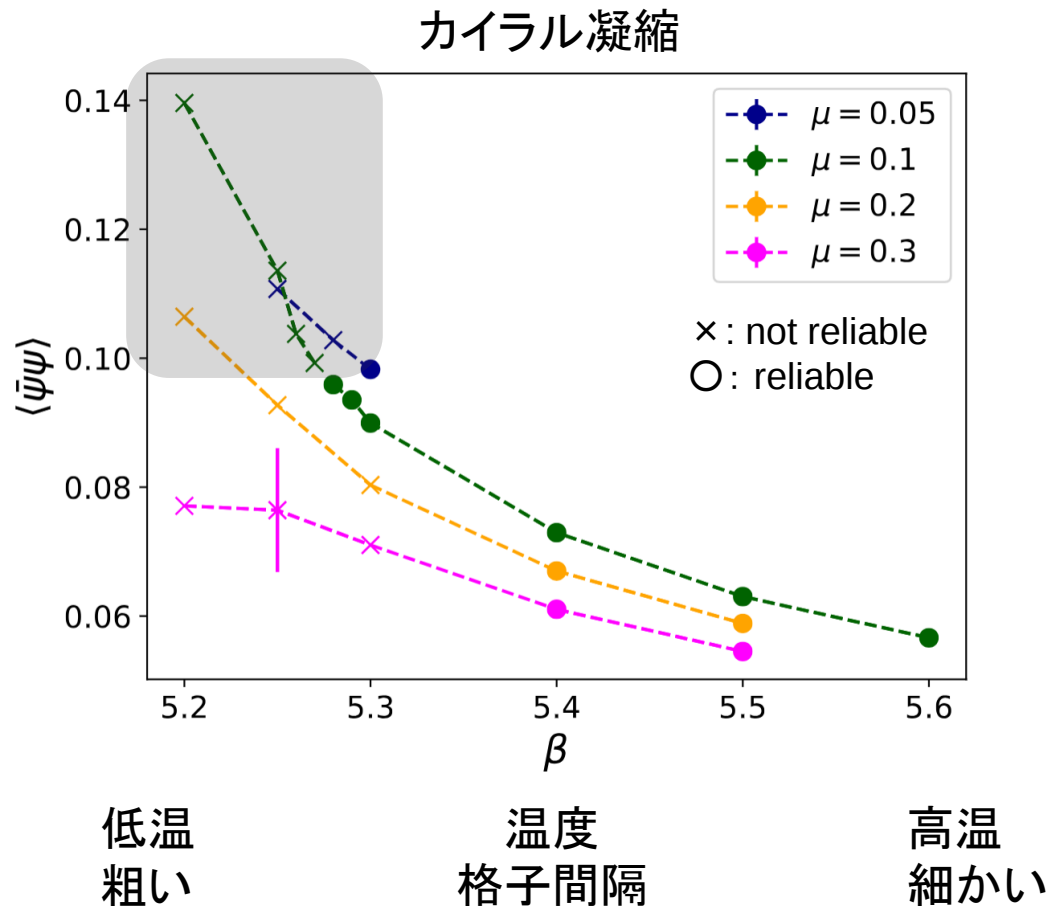
4フレーバー（スタaggerドフェルミオン）, $24^3 \times 12$, $ma=0.01$



期待：CLMの適用範囲を調べれば、
カイラル相転移がどこで起きる
かについての情報が得られる

CLMの適用範囲とカイラル凝縮

4フレーバー(スタaggerドフェルミオン), $24^3 \times 12$, $ma=0.01$

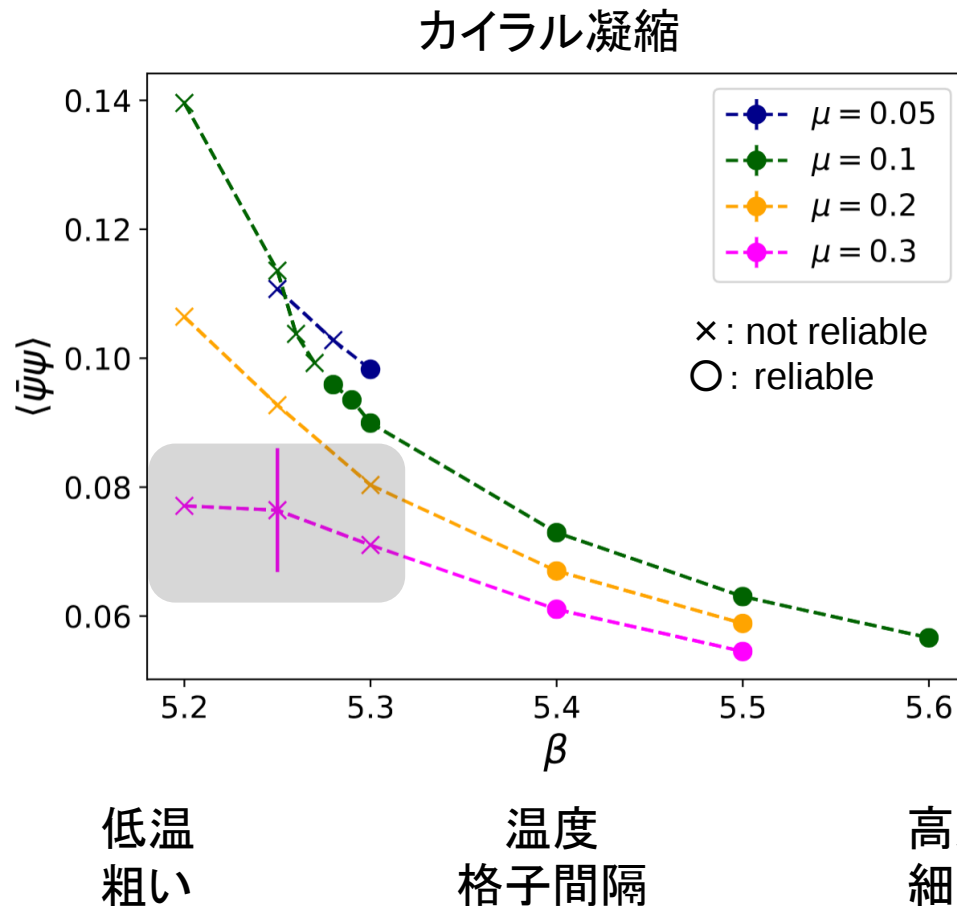


期待: CLMの適用範囲を調べれば、
カイラル相転移がどこで起きる
かについての情報が得られる

カイラル凝縮がある程度大きくなると、
CLMがsingular drift 問題により破綻す
る傾向にある

CLMの適用範囲とカイラル凝縮

4フレーバー(スタaggerドフェルミオン), $24^3 \times 12$, $ma=0.01$



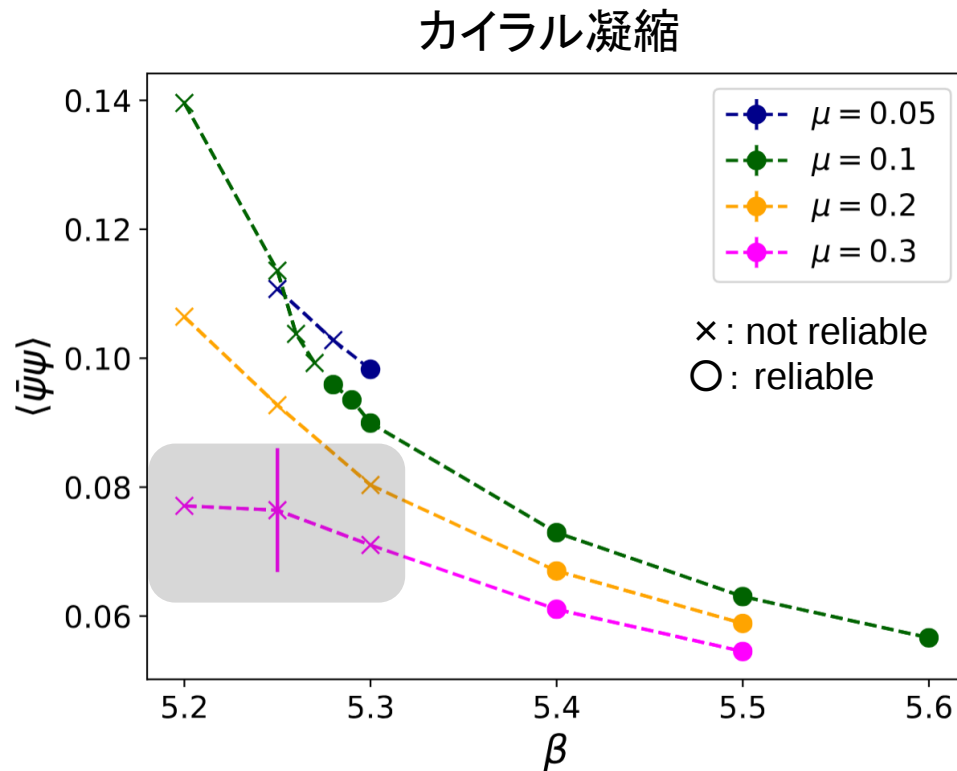
期待: CLMの適用範囲を調べれば、
カイラル相転移がどこで起きる
かについての情報が得られる

ただし μ が大きい場合は、singular drift
問題に加え excursion 問題がより深刻
になっており、カイラル凝縮の値が小さく
てもCLMが破綻する場合がある

→ カイラル相転移がどこで起きている
かは分からない

CLMの適用範囲とカイラル凝縮

4フレーバー(スタaggerドフェルミオン), $24^3 \times 12$, $ma=0.01$



低温
粗い

温度
格子間隔

高温
細かい

期待: **excursion問題**を抑制した上で
CLMの適用範囲を調べれば、
カイラル相転移がどこで起きる
かについての情報が得られる

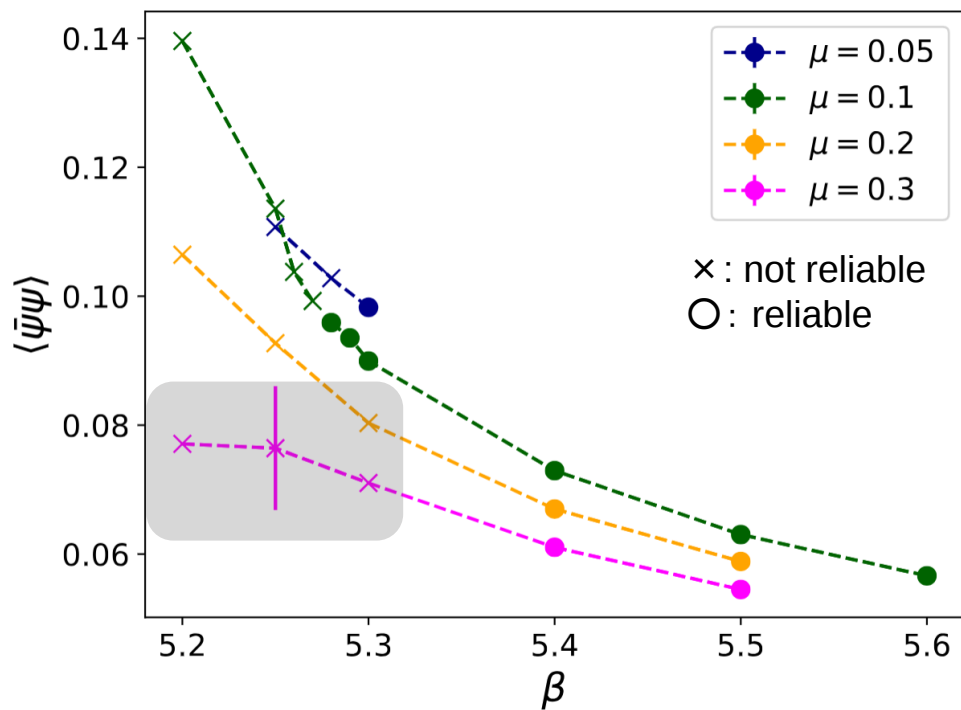
ただし μ が大きい場合は、singular drift
問題に加え excursion 問題がより深刻
になっており、カイラル凝縮の値が小さく
てもCLMが破綻する場合がある

→ カイラル相転移がどこで起きている
かは分からない

展望1/3

4フレーバー(スタaggerドフェルミオン), $24^3 \times 12$, $ma=0.01$

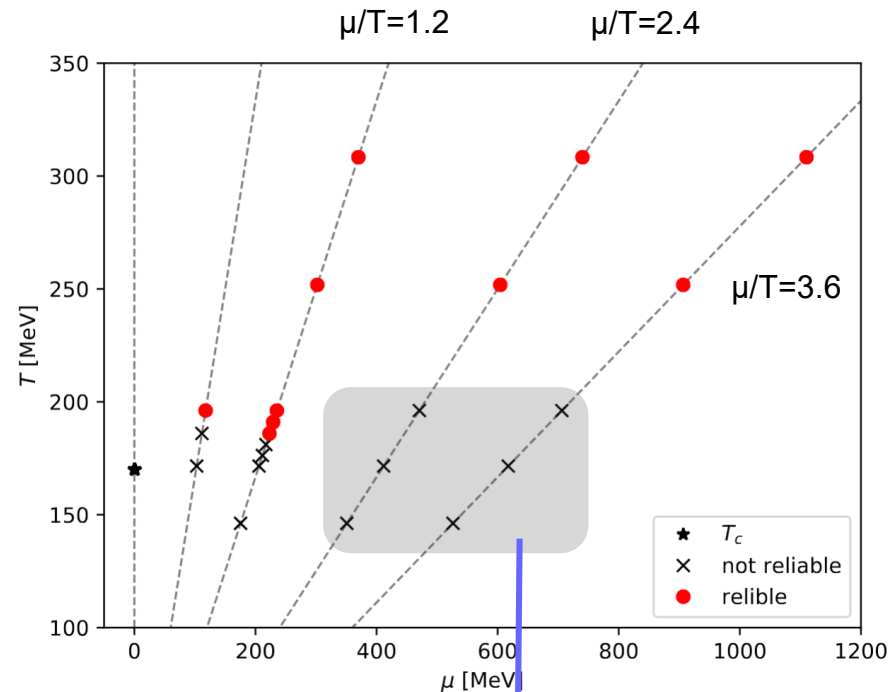
カイラル凝縮



低温
粗い

温度
格子間隔

高温
細かい

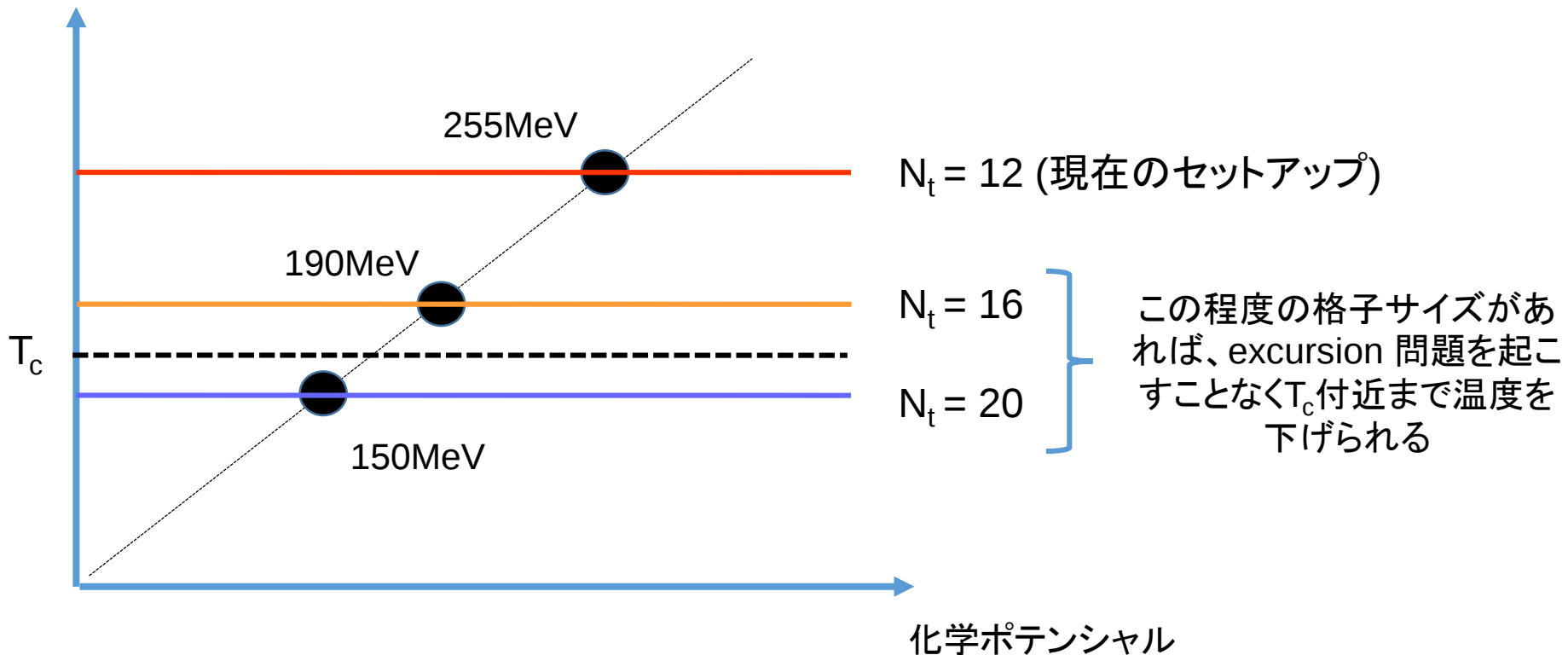


この領域でexcursion問題が
起こらないようにするには
どうすれば良いか？

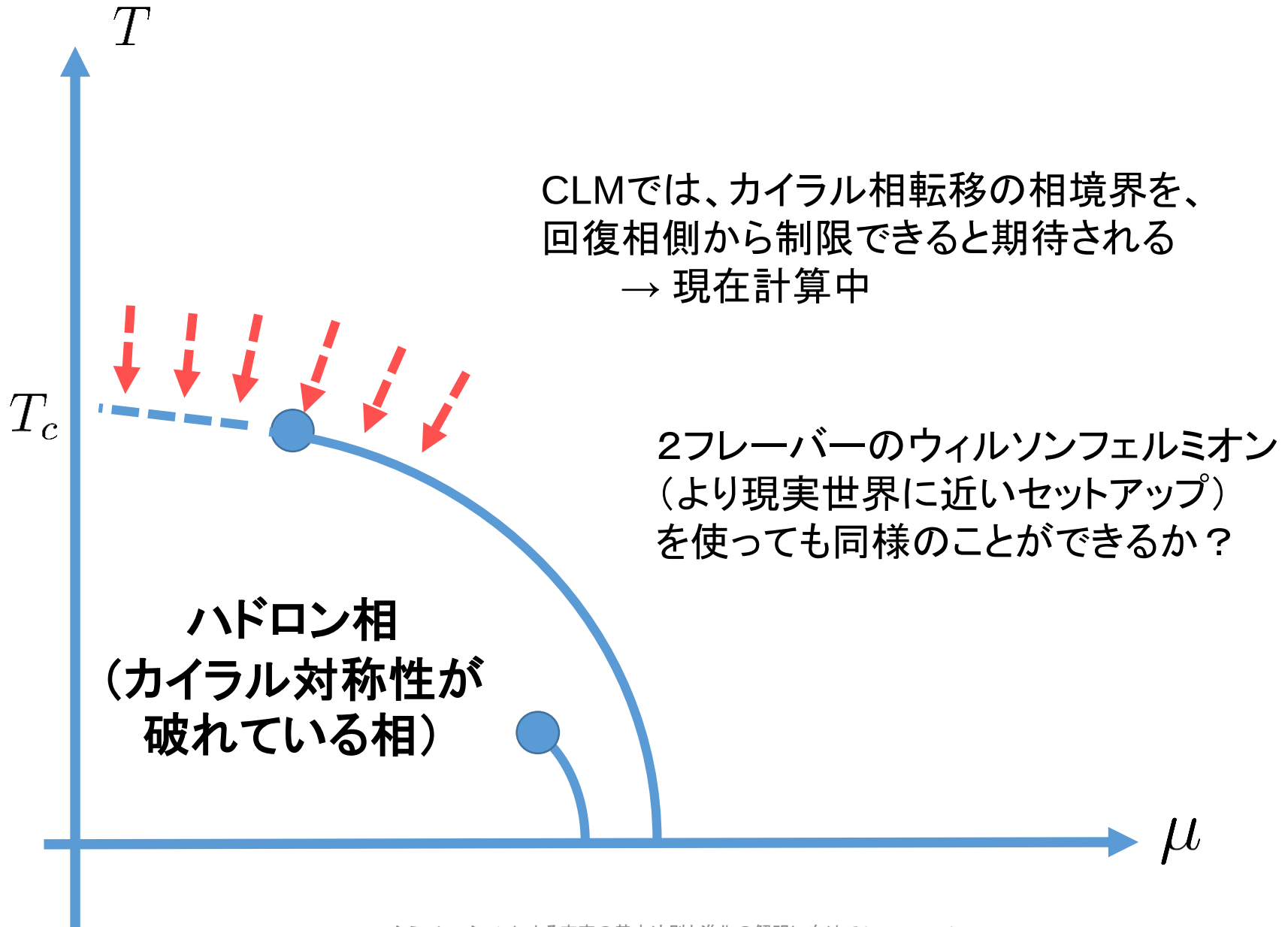
展望 2/3

格子間隔を小さく、時間方向の格子サイズ大きくすれば良い。
($\therefore$ excursion 問題は格子間隔を小さくすればコントロールできる。)

温度 (例) 格子間隔が $a=0.07\text{fm}$ ($\beta=5.4$) で達成できる温度 ... $T = 1/(N_t a)$



展望 3/3



まとめ

- 複素Langevin法が破綻する要因は、excursion 問題と singular drift 問題がある
- generalized Banks-Casher relation から、カイラル対称性が破れている場合に、singular drift 問題が発生することが示唆される
- μ が小さい場合、実際カイラル凝縮が大きいところで、CLMが破綻していた
- μ が大きい場合は、excursion 問題が深刻であり、カイラル対称性との関係を議論するには、より大きな格子での計算が必要
- 展望：
カイラル相転移の phase boundary の制限をつける
Wilson fermionを用いた計算